

**Magdalena Frasyńnik-Pietrzyk**

Wyższa Szkoła Bankowa we Wrocławiu

## **Dominacja stochastyczna w ocenie efektywności OFE**

**Streszczenie.** Ustawowa stopa zwrotu wykorzystywana do oceny efektywności inwestycji otwartych funduszy emerytalnych (OFE) jest miarą powszechnie krytykowaną, ponieważ nie uwzględnia ryzyka podejmowanego przez te podmioty. Dlatego do oceny działalności OFE wykorzystuje się głównie miary wywodzące się z klasycznej teorii portfelowej. W artykule zaprezentowana została nieklasyczna metoda oceny efektywności – dominacja stochastyczna.

**Słowa kluczowe:** dominacja stochastyczna, klasyczna teoria portfelowa, portfele efektywne, efektywność inwestycji

### **Wstęp**

Głównym celem wdrożonej 1 stycznia 1999 r. reformy systemu emerytalnego było dostosowanie go do zachodzących niekorzystnych procesów demograficznych (wydłużanie się przeciętnego czasu trwania życia, spadek przyrostu naturalnego, a także wcześniejsze przechodzenie na emeryturę) oraz przyspieszenie rozwoju gospodarczego kraju. Dotychczasowy system o zdefiniowanym świadczeniu przekształcono w system o zdefiniowanej składce. Część obowiązkowa systemu

podzielona została na część finansową i niefinansową. Składkę emerytalną w celu dywersyfikacji ryzyka podzielono między dwa indywidualne konta.

W części finansowej systemu inwestowaniem środków zajmują się otwarte fundusze emerytalne (OFE). OFE są inwestorami instytucjonalnymi, których politykę inwestycyjną determinują w dużym stopniu ograniczenia nałożone przez ustawodawcę. Polityka inwestycyjna poszczególnych funduszy jest bardzo zbliżona, ponieważ zarządzający aktywami koncentrują się na osiągnięciu odpowiedniej stopy zwrotu na koniec marca i września, kiedy to następuje porównanie wyników osiągniętych w ostatnich trzech latach.

Powszechna krytyka ustawowej miary efektywności prowadzi do poszukiwania innych metod oceny działalności inwestycyjnej OFE. Wśród nich najpopularniejsze są miary wywodzące się z klasycznej teorii portfelowej. Miary te wykorzystują zależność ryzyko – stopa zwrotu. Alternatywnym podejściem w ocenie efektywności inwestycji może być kryterium dominacji stochastycznej. Celem artykułu jest sprawdzenie możliwości wykorzystania dominacji stochastycznej do oceny działalności OFE.

## 1. Klasyczna teoria portfelowa

Autorem klasycznej teorii portfelowej jest Harry Markowitz<sup>1</sup>. Miary efektywności oparte na teorii portfelowej pozwalają nie tylko na porównanie wyników inwestycyjnych poszczególnych podmiotów, ale również odniesienie ich do ustalonego benchmarku (portfela wzorcowego).

W ciągu ostatnich lat popularność zyskała grupa miar określana jako *Risk-Adjusted Performance Measures (RAPM)*, czyli miary efektywności zarządzania portfelem skorygowane o ryzyko. Do grupy tej należą mierniki Sharpe'a, Treynora i Jensena, które stanowią podstawę do tworzenia innych miar efektywności.

Miary *RAPM* uwzględniają ryzyko i stopę zwrotu charakterystyczną dla inwestycji i pozwalają na stworzenie rankingu inwestycji, który szereguje je na podstawie efektywności zarządzania.

Typowa miara z rodziny *RAPM* przyjmuje następującą postać:

$$RAPM = \text{miara stopy zwrotu} / \text{miara ryzyka}.$$

Klasyczna teoria portfelowa opiera się jednak na wielu założeniach. Wśród najważniejszych należy wymienić założenie o normalności rozkładu stóp zwrotu

<sup>1</sup> H. Markowitz, *Portfolio selection*, „The Journal of Finance” 1959, Vol. 7, No. 1, s. 77-91.

z inwestycji czy awersję do ryzyka inwestora, który ma kwadratową funkcję użyteczności<sup>2</sup>.

## 2. Dominacja stochastyczna

Metoda (kryterium) dominacji stochastycznej (stochastic dominance) opiera się na mniejszej liczbie założeń niż teoria portfelowa. Jedyne założenie, jakie należy poczynić stosując tę metodę, to założenie dotyczące preferencji inwestora<sup>3</sup>.

Dominacja stochastyczna pozwala na ocenę dwóch inwestycji pod względem atrakcyjności dla inwestora. Metoda ta oparta jest na teorii oczekiwanej użyteczności, która zakłada, że inwestor wybiera inwestycję, która ma największą oczekiwaną użyteczność wypłaty oraz że inwestor postępuje racjonalnie<sup>4</sup>. Funkcja użyteczności inwestora jest jednocześnie niemalejąca i wklęsła. Są to warunki nałożone na funkcje użyteczności, które oznaczają, że „inwestor preferuje większy zysk” oraz charakteryzuje się „awersją do ryzyka”.

Wykorzystanie teorii oczekiwanej użyteczności do oceny inwestycji obarczonych różnym poziomem ryzyka wymaga znajomości funkcji użyteczności indywidualnego inwestora. Metoda dominacji stochastycznej pozwala na ocenę inwestycji w sytuacji, gdy nie znamy kształtu funkcji użyteczności poszczególnych inwestorów, ale możemy przyjąć, iż dana klasa funkcji użyteczności jest reprezentatywna dla pewnej grupy inwestorów. Założenie takie możemy poczynić dla członków funduszy emerytalnych, którzy oczekują jak najwyższej stopy zwrotu przy możliwie niskim poziomie ryzyka.

### 2.1. Dominacja stochastyczna pierwszego rzędu (*First stochastic dominance – FSD*)

W kryterium dominacji stochastycznej pierwszego stopnia przyjmuje się jedynie założenie, że funkcja użyteczności inwestora jest niemalejąca. Inwestor taki woli posiadać więcej niż mniej, natomiast nie jest brana pod uwagę jego skłonność do ryzyka. Funkcja użyteczności inwestora może być na pewnych odcinkach wypukła, a na innych wklęsła.

<sup>2</sup> Por. G. Trzpiot, *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach”, Katowice 2006.

<sup>3</sup> Tamże.

<sup>4</sup> Por. P. Jaworski, J. Micał, *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa 2005.

**Definicja 1**

„Portfel A (o dystrybucie rozkładu  $F_A(x)$ ) dominuje nad portfelem B (o dystrybucie rozkładu  $F_B(x)$ ) w sensie stochastycznej dominacji rzędu I, jeśli:

- inwestor preferuje posiadanie więcej niż mniej, tzn. jego funkcja użyteczności jest rosnąca (czyli pochodna jego funkcji użyteczności jest dodatnia),
- zachodzi

$$F_A(x) \leq F_B(x)$$

dla każdego  $x$ , przy czym przynajmniej dla jednego  $x$  powyższa nierówność jest ostra”<sup>5</sup>.

W praktyce może się zdarzyć, że dominacja stochastyczna rzędu I nie da jednoznacznej odpowiedzi, która inwestycja jest lepsza. W takiej sytuacji można zastosować kryterium SD rzędu II.

## 2.2. Dominacja stochastyczna drugiego rzędu (*Second stochastic dominance – SSD*)

W kryterium dominacji stochastycznej drugiego rzędu czyni się dodatkowe założenie w odniesieniu do skłonności do ryzyka pojedynczego inwestora. Zakładamy, że inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka, zatem jego funkcja użyteczności jest wklęsła.

**Definicja 2**

„Portfel A (o dystrybucie rozkładu  $F_A(x)$ ) dominuje nad portfelem B (o dystrybucie rozkładu  $F_B(x)$ ) w sensie stochastycznej dominacji rzędu II, jeśli:

- inwestor preferuje posiadanie więcej niż mniej, tzn. jego funkcja użyteczności jest rosnąca (czyli pierwsza pochodna jego funkcji użyteczności jest dodatnia),
- inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka, to znaczy, jego funkcja użyteczności jest wklęsła (czyli druga pochodna jego funkcji użyteczności jest ujemna),
- zachodzi

$$\int_{-\infty}^x F_A(y) dy \leq \int_{-\infty}^x F_B(y) dy$$

dla każdego  $x$ , przy czym przynajmniej dla jednego  $x$  powyższa nierówność jest ostra”<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> T. Jajuga, K. Jajuga, *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999, s. 157-158.

<sup>6</sup> Tamże, s. 161.

### 2.3. Dominacja stochastyczna trzeciego rzędu (Third stochastic dominance – TSD)

Poszerzając rozważania dotyczące preferencji inwestorów, w TSD czyni się kolejne założenie, ograniczając tym samym liczbę inwestorów. Kryterium dominacji stochastycznej trzeciego rzędu jest odpowiednim kryterium efektywności dla inwestorów preferujących wyższy zysk, charakteryzujących się awersją do ryzyka oraz malejącą krańcową awersją do ryzyka.

#### Definicja 3

„Portfel A (o dystrybucie rozkładu  $F_A(x)$ ) dominuje nad portfelem B (o dystrybucie rozkładu  $F_B(x)$ ) w sensie stochastycznej dominacji rzędu III, jeśli:

- inwestor preferuje posiadanie więcej niż mniej, tzn. jego funkcja użyteczności jest rosnąca (czyli pochodna jego funkcji użyteczności jest dodatnia),
- inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka, to znaczy, jego funkcja użyteczności jest wklęsła (czyli druga pochodna jego funkcji użyteczności jest ujemna),
- inwestor ma malejącą awersję do ryzyka (trzecia pochodna funkcji użyteczności jest dodatnia),
- zachodzi

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^t F_A(y) dy dt \leq \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^t F_B(y) dy dt$$

dla każdego  $x$ , przy czym przynajmniej dla jednego  $x$  powyższa nierówność jest ostra”<sup>7</sup>.

Kryterium dominacji stochastycznej można uogólniać na wyższe rzędy, czyniąc dodatkowe założenia co do preferencji inwestora. Teoria dominacji stochastycznej omija przede wszystkim założenie o normalności rozkładu stóp zwrotu. Jest metodą, która pozwala na porównanie dwóch inwestycji i w efekcie uzyskanie zbioru efektywnych inwestycji, które nie są zdominowane przez inne. Jest zatem podejściem pozwalającym dokonać analizy efektywności inwestycji w powiązaniu z teorią użyteczności<sup>8</sup>.

Dowody teorii SD można znaleźć między innymi w opracowaniu Kruschwitsa<sup>9</sup> oraz Eltona i Grubera<sup>10</sup>.

<sup>7</sup> Tamże.

<sup>8</sup> Por. G. Trzpiot, *Analiza efektywności inwestycji OFE z wykorzystaniem kryterium SD*, w: *Rynek kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie*, red. W. Tarczyński, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2004, s. 227-235.

<sup>9</sup> L. Kruschwitz, *Finansowanie i inwestycje*, CeDeWu, Warszawa 2007.

<sup>10</sup> E.J. Elton, M.J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.

### 3. Analiza empiryczna

W badaniu wykorzystane zostały miesięczne logarytmiczne stopy zwrotu 14 funduszy emerytalnych. Dane pochodzą z okresu od stycznia 2001 do lutego 2010 r. Do wyznaczenia miar efektywności wykorzystany został benchmark składający się w 30% z indeksu WIG i w 70% z indeksu polskich obligacji Merrill Lynch. Benchmark jest portfelem wzorcowym, który odzwierciedla strukturę portfeli inwestycyjnych OFE. Dla par funduszy zbadane zostały dominacje I, II i III rzędu. Tabela 1 przedstawia wyniki zaobserwowanych dominacji.

Tabela 1. Dominacje stochastyczne OFE za okres styczeń 2001 – marzec 2010

	Aviva	Amplico	Allianz	PKO BP Bankowy	Warta	AEGON	ING	PEKAO	Pocztylion	POLSAT	PZU	Generali	Nordea	AXA
Aviva	-		TSD			TSD		SSD				SSD	SSD	SSD
Amplico		-	TSD			TSD		TSD				SSD	SSD	SSD
Allianz			-											
PKO BP Bankowy			SSD	-								SSD		SSD
Warta			SSD		-							SSD		SSD
AEGON			SSD			-								
ING	TSD		TSD			TSD	-	TSD	TSD		TSD	TSD	TSD	TSD
PEKAO			TSD					-						
Pocztylion			SSD						-			SSD		
POLSAT			TSD			TSD		TSD		-		TSD	TSD	TSD
PZU			TSD			TSD		TSD			-	TSD	TSD	TSD
Generali			TSD									-		TSD
Nordea			TSD										-	
AXA			TSD											-

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że w analizowanym okresie nie zaobserwowano dominacji stochastycznych rzędu I. W tabeli 1 przedstawiono wyniki zaobserwowanych dominacji II i III rzędu. Fundusz, którego nazwa znajduje się po lewej stronie tabeli dominuje nad funduszem, którego nazwa znajduje się na górze tabeli. Do portfeli efektywnych należy zaliczyć fundusze, które nie są zdominowane przez żaden inny fundusz. W analizowa-

nym okresie są to: Amplico, Bankowy, Warta, ING oraz Polsat. Fundusz ING dominuje nad 9 funduszami, Polsat nad 6. Fundusze Aviva, Pocztylion i PZU są zdominowane jedynie przez jeden fundusz – ING. Ponadto można wskazać wiele pojedynczych dominacji, np. Aviva, Amplico, Polsat, PZU dominują nad 6 funduszami, PKO BP Bankowy dominuje nad Allianzem, Generali i Axą, czy Axa, która dominuje nad Allianzem.

Analogicznie przeprowadzona została analiza dla krótszych okresów. Pierwsze badanie obejmowało stopy zwrotu funduszy od stycznia 2001 do lutego 2005 r., drugie od marca 2005 do lutego 2010 r. Wyniki przedstawiają tabele 2 i 3.

Tabela 2. Dominacje stochastyczne OFE za okres styczeń 2001 – luty 2005

	Aviva	Amplico	Allianz	PKO BP Bankowy	Warta	AEGON	ING	PEKAO	Pocztylion	POLSAT	PZU	Generali	Nordea	AXA
Aviva	–													
Amplico	TSD	–	SSD			TSD	SSD	TSD		SSD	SSD		SSD	SSD
Allianz			–											
PKO BP Bankowy	TSD	TSD	TSD	–	TSD	TSD	SSD	SSD	TSD	SSD	SSD	TSD	SSD	TSD
Warta	SSD		SSD		–	SSD	SSD			SSD			SSD	
AEGON						–								
ING							–							
PEKAO								–						
Pocztylion	SSD		SSD			SSD	SSD		–					
POLSAT			TSD							–			TSD	
PZU			TSD								–		TSD	
Generali	TSD		TSD				SSD					–		
Nordea									SSD				–	
AXA			TSD							TSD			SSD	–

Źródło: opracowanie własne.

W analizowanym okresie 4-letnim jedynie jeden fundusz – Bankowy – nie jest zdominowany i można go zaliczyć do zbioru efektywnego. Bankowy jest jednocześnie funduszem, który dominuje nad wszystkimi pozostałymi funduszami. Trzy fundusze – Amplico, Generali i Warta – są zdominowane jedynie przez jeden fundusz – Bankowy. Trzy kolejne – PEKAO, Pocztylion i AXA – są zdominowane przez dwa fundusze – Bankowy i odpowiednio AIG, Nordeai AIG.

Tabela 3. Dominacje stochastyczne OFE za okres marzec 2005 – luty 2010

	Aviva	Amplico	Allianz	PKO BP Bankowy	Warta	AEGON	ING	PEKAO	Pocztynion	POLSAT	PZU	Generali	Nordea	AXA
Aviva	-	SSD	SSD	TSD		SSD		TSD	SSD			SSD	TSD	SSD
Amplico		-				TSD			TSD			SSD		TSD
Allianz			-											
PKO BP Bankowy			SSD	-								SSD		SSD
Warta			SSD	TSD	-							SSD		SSD
AEGON			SSD			-						TSD		
ING	TSD	SSD	SSD	TSD	TSD	SSD	-	SSD	SSD		TSD	SSD	TSD	SSD
PEKAO			TSD					-				SSD		TSD
Pocztynion			TSD						-			SSD		
POLSAT		TSD	TSD	TSD		TSD		TSD	TSD	-		SSD	TSD	TSD
PZU			SSD	TSD	TSD	TSD		SSD	SSD		-	SSD	TSD	SSD
Generali			TSD									-		SSD
Nordea			SSD									SSD	-	SSD
AXA			TSD											-

Źródło: opracowanie własne.

Analizując dane z okresu marzec 2005 – luty 2010 otrzymano 2 fundusze efektywne – ING oraz Polsat. Ponadto fundusz ING dominuje nad 12 funduszami (wszystkimi poza Polsatem), Polsat dominuje nad 8 funduszami. Fundusze Aviva i PZU są zdominowane jedynie przez ING.

Kryterium dominacji stochastycznej, należące do nieklasycznych metod oceny efektywności inwestycji, może być stosowane jako alternatywne narzędzie przy ocenie efektywności inwestycji OFE (spełnione są podstawowe założenia metody – inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka i podejmuje decyzje długoterminowe). W zależności od analizowanego okresu otrzymamy inne zbiory portfeli efektywnych. Biorąc pod uwagę długoterminowy charakter inwestycji emerytalnych, należałoby wydłużyć szeregi wykorzystywane do wyznaczenia portfeli efektywnych.

Dla porównania przeprowadzono analizę efektywności inwestycji na podstawie dwóch podstawowych miar klasycznej teorii portfelowej – miernika Sharpe'a i Treynora. Oszacowania parametrów funduszy emerytalnych oraz porządkowania z wykorzystaniem mierników prezentują tabele 4 i 5.



Tabela 4. Podstawowe charakterystyki OFE

	<b>Aviva</b>	<b>Amplico</b>	<b>Allianz</b>	<b>PKO BP Bankowy</b>	<b>Warta</b>	<b>AEGON</b>	<b>ING-NN</b>
Średnia	0,67%	0,69%	0,67%	0,67%	0,62%	0,63%	0,73%
Odchylenie standardowe	2,41%	2,38%	2,07%	2,74%	2,40%	2,21%	2,53%
Beta benchmark	0,741064819	0,7356755	0,627262083	0,788292451	0,727456857	0,673644966	0,763010619

  

	<b>PEKAO</b>	<b>Pocztalion</b>	<b>POLSAT</b>	<b>PZU</b>	<b>Generali</b>	<b>Nordea</b>	<b>AXA</b>
Średnia	0,69%	0,61%	0,74%	0,73%	0,73%	0,71%	0,69%
Odchylenie standardowe	2,30%	2,28%	2,46%	2,41%	2,37%	2,28%	2,27%
Beta benchmark	0,680743348	0,701553006	0,746352892	0,735619965	0,739971292	0,70707437	0,688977636

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Rankingi OFE z wykorzystaniem miernika Sharpe'a i Treynora

<b>Fundusz</b>	<b>Miernik Sharpe'a</b>	<b>Miernik Treynora</b>
POLSAT	0,05116	0,00168
PZU	0,04961	0,00163
Generali	0,04882	0,00156
ING	0,04560	0,00151
Nordea	0,04075	0,00132
AXA	0,03649	0,00120
PEKAO	0,03285	0,00111
Amplico	0,03066	0,00099
Allianz	0,02598	0,00086
Aviva	0,02402	0,00078
PKO BP Bankowy	0,02178	0,00076
AEGON	0,01010	0,00033
Warta	0,00333	0,00011
Pocztalion	0,00117	0,00004

Źródło: opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że oba mierniki tworzą taki sam ranking funduszy. Analizując okres prawie 10-letni, otrzymujemy takie same porządkowania, bez względu na wykorzystaną miarę ryzyka. Ponadto należy zauważyć, że parametry takie jak średnia i odchylenie standardowe różnią się w niewielkim stopniu dla poszczególnych funduszy. Fundusze stosują bardzo podobne strategie

inwestycyjne i w długim okresie osiągnęły bardzo zbliżone wyniki z działalności inwestycyjnej.

Analizując wyniki działalności inwestycyjnej OFE z wykorzystaniem klasycznych i nieklasycznych metod, można wskazać trzy najlepsze fundusze – Polsat, PZU oraz ING. Polsat jest funduszem zajmującym pierwsze miejsce w rankingu utworzonym z wykorzystaniem miernika Sharpe’a i Treynora, jest jednocześnie funduszem efektywnym w sensie SD. PZU zajmuje drugie miejsce w rankingu i jest funduszem zdominowanym jedynie przez ING. Miernik Sharpe’a i Treynora dają 4 pozycję w rankingu funduszowi ING, który jest jednocześnie portfelem efektywnym według SD.

### Podsumowanie

Zaprezentowana metoda dominacji stochastycznej może być wykorzystywana jako narzędzie uzupełniające przy ocenie efektywności inwestycji. Kryterium to, w połączeniu z miarami wywodzącymi się z klasycznej teorii portfelowej, uwzględniającymi zależność dochód-ryzyko, może być pomocnym narzędziem np. w momencie dokonywania wyboru funduszu bądź też przy jego zmianie. Metoda ta może być również metodą wspomagającą dla organów nadzoru w ocenie efektywności zarządzania OFE. Fundusze powinny być porównywane według jednolitych, ale różnorodnych metod oceny. Wykorzystanie kilku podejść może uwzględniać różne założenia, a wyniki tak stworzonych rankingów mogą dawać pełniejszy obraz działalności inwestycyjnej OFE w Polsce. Badania nad możliwością zastosowania różnych metod oceny efektywności inwestycyjnej powinny stanowić punkt wyjścia dla zmian dotychczasowego systemu ustawowej oceny.

### Literatura

- Elton E.J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998.
- Jajuga T., Jajuga K., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
- Jaworski P., Micał J., *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa 2005.
- Kruschwitz L., *Finansowanie i Inwestycje*, CeDeWu, Warszawa 2007.
- Piasecki K., *Modele matematyki finansowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

- Sharpe W.F., *Mutual Fund Performance*, „The Journal of Business” 1966, Vol. 39, No. 1, Part 2: Supplement on Security prices, January.
- Treynor J., *How to Rate Management Investment Funds*, „Harvard Business Review” 1965, Vol. 43.
- Trzpiot G., *Analiza efektywności inwestycji OFE z wykorzystaniem kryterium SD*, w: *Rynek kapitałowy Skuteczne Inwestowanie*, red. W. Tarczyński, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2004.
- Trzpiot G., *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2006.
- Trzpiot G., *Wybrane modele oceny ryzyka. Podejście nieklasyczne*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2008.