

**Wiesław Łuczyński**

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

## **Fraktalna natura procesów gospodarczych**

**Streszczenie.** Analiza wykładników Hursta ujawniła różnice wymiarów fraktalnych przebiegów czasowych realnych, wartościowych i koniunkturalnych obserwacji procesów gospodarczych Niemiec w okresie 1947-2010. Dzięki analizie falkowej ustalono (o ile to było możliwe) punkty zwrotne w dynamice badanych szeregów czasowych. Wartości wykładników Hursta zmieniały się wraz ze zmianą dynamiki przebiegów czasowych. Dla wszystkich szeregów oraz ich podokresów ustalono ich strukturę harmoniczną, wykorzystując metodę analizy spektralnej. Pozwoliło to zrekonstruować, metodą Packarda-Takenssa, portrety fazowe szeregów czasowych. Portrety te wskazują, że procesy gospodarcze są konfiguracją nieliniowych systemów chaotycznych.

**Słowa kluczowe:** wykładnik Hursta, analiza przeskalowanego zakresu R/S, wymiar fraktalny, analiza spektralna, teoria chaosu, dziwny atraktor<sup>1</sup>

### **Wstęp**

Ludwig von Mises w *Ludzkim działaniu* pisze: „Ekonomia nie jest – jak wciąż powtarzają niedouczeni pozytywiści – zacofana, ponieważ nie posługuje

---

<sup>1</sup> Definicje tzw. słów kluczowych znajdują się w załączniku.

się metodami «ilościowymi». Ekonomia nie jest ilościowa i nie zajmuje się mierzaniem, ponieważ nie bada wielkości stałych. Dane statystyczne na temat zdarzeń gospodarczych są danymi historycznymi. Mówią o tym, co się wydarzyło w niepowtarzalnym momencie historii. Zdarzenia fizyczne można interpretować na podstawie wiedzy o stałych zależnościach, którą uzyskuje się za pomocą eksperymentów. Zdarzeń historycznych nie da się w ten sposób interpretować. Historyk może wymienić wszystkie czynniki, które złożyły się na znany skutek, oraz wszystkie czynniki, które przeciwdziałały zaistnieniu tego skutku i mogły go opóźnić lub złagodzić. Nie może on jednak ustalić metodą ilościową relacji między różnymi czynnikami składającymi się na określony skutek a ich ostatecznymi rezultatami. Tego można dokonać tylko dzięki rozumieniu. Tylko za pomocą rozumienia można przypisać każdemu z  $n$  czynników określony udział w powstaniu skutku  $P$ . Można powiedzieć, że zrozumienie jest w historii tym, czym analiza ilościowa i pomiar w innych naukach<sup>2</sup>. Argument braku stałych zależności w ekonomii nie jest bezpodstawny. Czy zatem ekonomiści mogą stosować metody przejęte z nauk ścisłych? Jeżeli w ekonomii nie istnieją stałe, analogiczne do stałych fizycznych w naukach przyrodniczych, to wszelkie próby eksperymentalnego ustalenia takich stałych zależności są skazane na niepowodzenie. Nie można bowiem dowieść istnienia czegoś, co nie istnieje. Niematerialna natura przedmiotu ekonomii wymusza zastosowania metod zasadniczo różnych od eksperymentów laboratoryjnych. Materiał empiryczny, jakim dysponują ekonomiści, ma charakter historyczny. Czy jednak rejestrowane obserwacje są niepowtarzalne i nieprzewidywalne? Czy może za pozorną zmiennością zjawisk ekonomicznych kryją się względnie trwałe relacje i zależności? Czy następnie stopień zmienności (niezmienności) relacji ekonomicznych poddaje się kwantyfikacji? Podważenie argumentacji L. von Misesa wydaje się możliwe poprzez reinterpretację procesów gospodarczych jako procesów samopodobnych (fraktalnych).

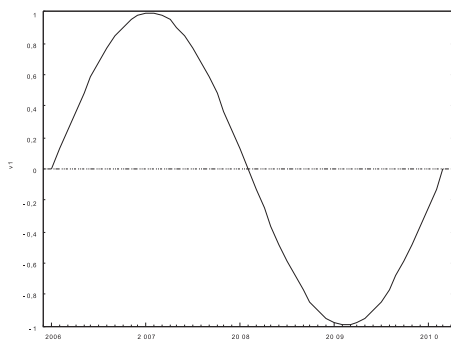
### Analiza empiryczna

„Przestrzenna” analiza sygnałów dynamiki procesów gospodarczych dostarcza obrazu dziwnego atraktora ekonomicznych szeregów czasowych. Zastosowana poniżej metoda rekonstrukcji dziwnego atraktora nawiązuje do znanej metody Packarda-Takensa<sup>3</sup>. F. Takens dowiódł, że można zrekonstruować niektóre

<sup>2</sup> L. von Mises, *Ludzkie działanie. Traktat o ekonomii*, przekład W. Falkowski, Wydawnictwo Instytutu Ludwiga von Misesa, Warszawa 2007, s. 48.

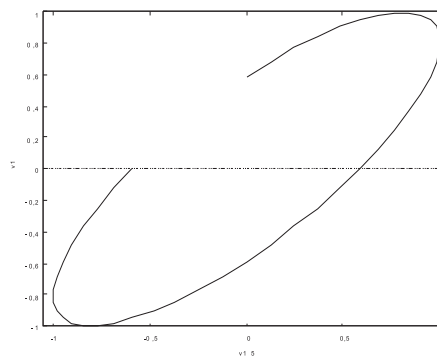
<sup>3</sup> Zob. I. Steward, *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, s. 214-217, 320-323; H.G. Schuster, *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993, s. 126-128, 158.

własności atraktora w przestrzeni fazowej, korzystając z pomiarów jednej zmiennej. Znajomość przebiegu czasowego jednej zmiennej wystarcza do odtworzenia statycznych i dynamicznych własności dziwnego atraktora. Sposób rekonstrukcji atraktora nie zależy od tego, jaki konkretnie proces jest obserwowany. W tym celu tworzymy dwa dodatkowe (fikcyjne) szeregi obserwacji poprzez przesunięcie czasowe analizowanego szeregu. Uzyskujemy zatem trójwymiarową przestrzeń reprezentowaną przez szereg oryginalny i jego dwie kopie przesunięte (przyspieszone) odpowiednio o jeden i dwa okresy (obserwacje). Poszczególne punkty przemieszczają się wraz z upływem czasu w przestrzeni. Idea tej pomysłowej metody rekonstrukcji dziwnego atraktora pozwala pominąć zagadnienie jakościowej identyfikacji analizowanych zmiennych ekonomicznych. Na rysunkach 1-4 prezentujemy oryginalny szereg sinusoidalny i jego trzy „portrety” fazowe.



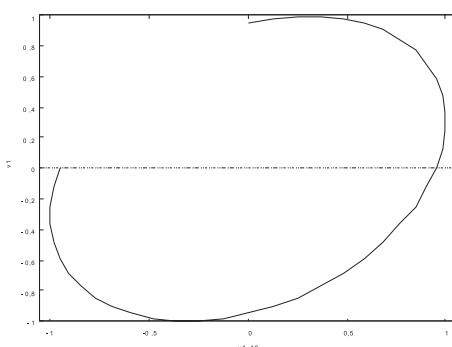
Rys. 1. Przebieg sinusoidalny  
(50 obserwacji)

Źródło: opracowanie własne w Gretl.



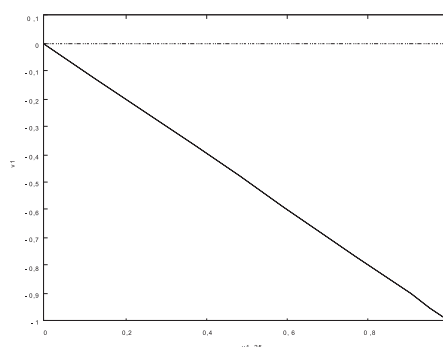
Rys. 2. Portret fazowy dziwnego atraktora  
(przesunięcie: 5 okresów)

Źródło: opracowanie własne w Gretl.



Rys. 3. Portret fazowy dziwnego atraktora  
(przesunięcie: 10 okresów)

Źródło: opracowanie własne w Gretl.



Rys. 4. Portret fazowy dziwnego atraktora  
(przesunięcie: 25 okresów)

Źródło: opracowanie własne w Gretl.

Metoda Packarda-Takensa umożliwia wyekstrahowanie chaotycznej dynamiki z danych eksperymentalnych. W tym celu analizie poddane zostały 22 szeregi czasowe produkcji w ujęciu fizycznym i wartościowym, obrotów produkcji przemysłowej, eksportu i importu, zatrudnienia w przemyśle, bezrobocia, wolnych miejsc pracy, cen dóbr przemysłowych, koniunktury w budownictwie i w przemyśle Niemiec w okresie 1947-2010 (w ujęciu miesięcznym).

Tabela 1. Szeregi czasowe gospodarki niemieckiej (dane miesięczne)

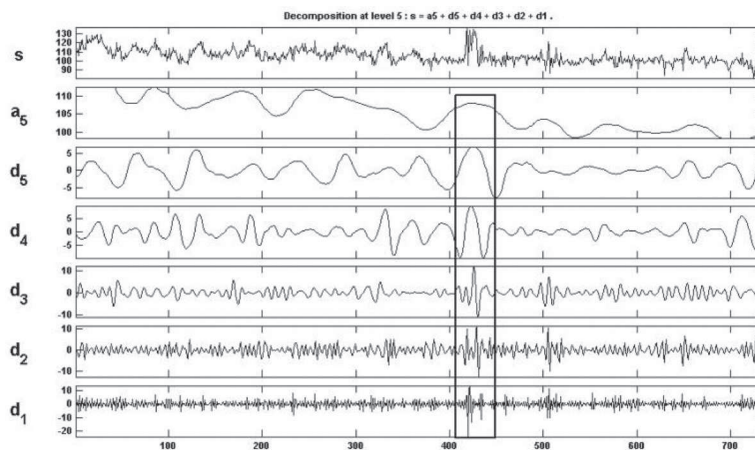
Symbol	Szereg czasowy	Okres	Liczba danych
Coal	Wydobycie węgla kamiennego (tys. t.)	1947-2010	759
Steel	Produkcja stali (tys. t.)	1949-2010	735
cement	Produkcja cementu (tys. t.)	1949-2010	735
electric	Produkcja energii elektrycznej (mln kwh)	1949-2010	735
Cars	Produkcja samochodów osobowych (tys.)	1949-2010	735
Prod	Produkcja przemysłowa ogółem	1949-2010	735
Inv	Produkcja dóbr inwestycyjnych	1949-2010	735
Row	Produkcja surowców i półproduktów	1949-2010	735
consum	Produkcja dóbr konsumpcyjnych	1949-2010	735
turn_n	Obroty nominalne przemysłu ogółem	1954-2010	666
turn_r	Obroty realne przemysłu ogółem	1954-2010	666
export	Wolumen eksportu	1949-2010	735
import	Wolumen importu	1949-2010	735
emploi	Zatrudnienie w przemyśle (tys.)	1949-2010	735
unemploy	Bezrobocie ogółem (tys.)	1949-2010	735
vacan	Wolne miejsca pracy (tys.)	1954-2010	667
cen_dyn	Dynamika cen dóbr przemysłowych (%)	1954-2010	667
pr_bud	Prognoza koniunktury w budownictwie	1967-2010	522
d_bud	Diagnoza koniunktury w budownictwie	1967-2010	522
pr_prz	Prognoza koniunktury w przemyśle	1969-2010	498
d_prz	Diagnoza koniunktury w przemyśle	1969-2010	498
pr_cen	Prognoza cen dóbr przemysłowych	1969-2010	498

Źródło: Wirtschaft und Statistik 1947-2010; Ifo-Institut 1967-2010.

Wszystkie dane (po przekształceniu na indeksy dynamiki, z wyjątkiem danych Ifo) zostały poddane procedurze miesięcznej korekty sezonowej w programie PASW Statistics 18<sup>4</sup> i nowe szeregi czasowe (zawierające trend cykliczny) oznakowane zostały przez dodanie do symbolu oryginalnego szeregu czasowego

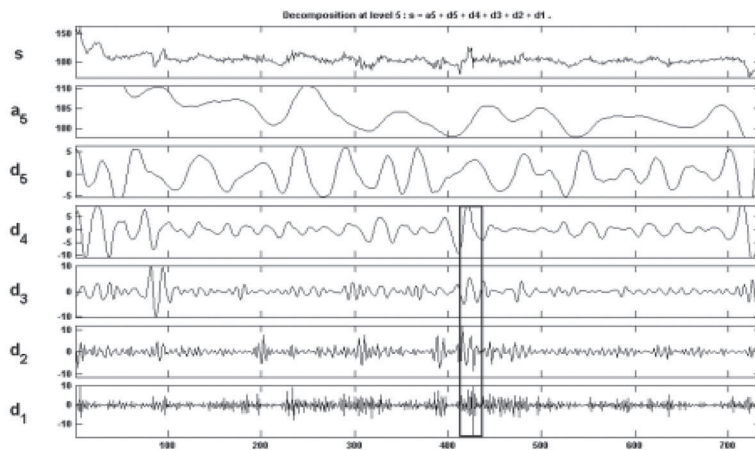
<sup>4</sup> Nr seryjny kopii programu: 10143819.

końcówki \_tc. Szeregi te cechuje zmienna dynamika. Aby określić punkty zwrotne zmian dynamiki, wykorzystano analizę falkową (zaimplementowaną do toolbox'a Matlab'a<sup>5</sup>). Na poniższych wykresach wyróżnione zostały okresy przejściowe pomiędzy względnie jednorodnymi dynamikami. Punkty zwrotne wyznaczają „igły” w detalach d1-d5.



Rys. 5. Analiza falkowa dynamiki produkcji energii elektrycznej

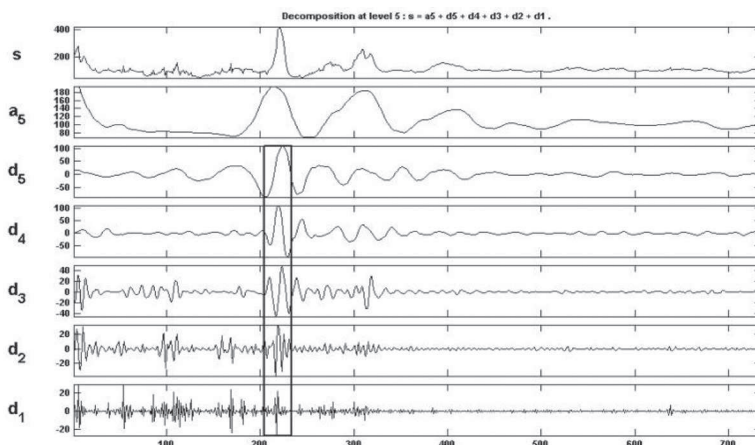
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 6. Analiza falkowa dynamiki produkcji przemysłowej ogółem

Źródło: obliczenia własne.

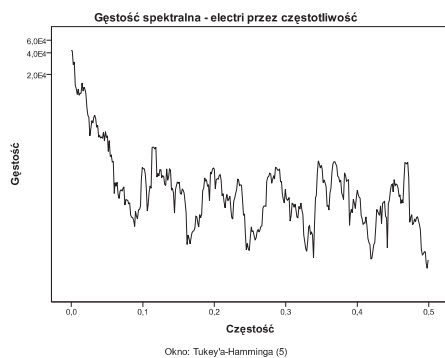
<sup>5</sup> License Number 265558 (Version R14).



Rys. 7. Analiza falkowa dynamiki bezrobocia

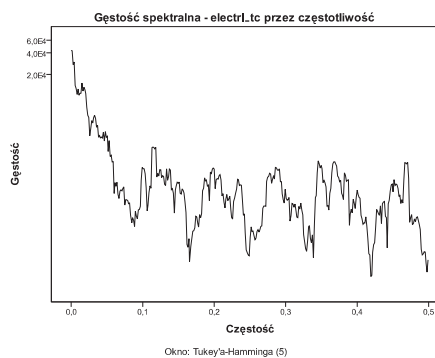
Źródło: obliczenia własne.

Dla poszczególnych okresów przeprowadzono analizę spektralną. Pozwoliło to prześledzić tendencje zmian w strukturze harmoniczej badanych szeregów czasowych. Ponadto okazało się, że jedynie w przypadku dynamiki wydobywania węgla kamiennego, prognozy i diagnozy koniunktury w budownictwie i w przemyśle oraz prognozy cen dóbr przemysłowych korekta sezonowa miała wpływ na funkcję gęstości spektralnej. Struktura harmoniczna pozostałych szeregów nie uległa zmianie. Poniższe wykresy (rys. 8, 9) są tego ilustracją.



Rys. 8. Analiza spektralna produkcji energii elektrycznej (bez korekty)

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 9. Analiza spektralna produkcji energii elektrycznej (po korekcie)

Źródło: obliczenia własne.

Modyfikacja struktury harmoniczej szeregów czułych na korektę sezonową polega na widocznym wzmocnieniu częstości niskich kosztem osłabienia częstości wysokich w ogólnej dynamice danych szeregów. Niezmienna struktura

harmoniczna pozostałych szeregów czasowych świadczy albo o nieobecności składnika sezonowego w ich przebiegach albo o tym, że standardowe metody korekcji sezonowej są (w przypadku indeksów łańcuchowych) mało efektywne. Jeżeli chodzi o modyfikacje struktury harmonicznej badanych szeregów, można zauważyć odwrotną zależność między udziałem niskich częstości a wykładnikiem Hursta. Wskazane wyżej podobieństwo przebiegu funkcji gęstości spektralnej szeregów „odpornych” na korekcję sezonową wiąże się ze zbliżonym wymiarem fraktalnym (wykładnikiem Hursta<sup>6</sup>) szeregu przed i po korekcji sezonowej. Poniższe zestawienie wyraźnie na to wskazuje.

Tabela 2. Wykładniki Hursta szeregów dynamiki gospodarczej Niemiec styczeń 1947 – czerwiec 2010

Symbol szeregu	Okres	Wykładnik Hursta
coal	01/1947 – 03/2010	0,143
coal_tc	01/1947 – 03/2010	0,384
	01/1947 – 02/1985	0,484
steel	03/1985 – 03/2010	0,356
	01/1949 – 03/2010	0,373
steel_tc	01/1949 – 03/2010	0,372
	01/1949 – 10/1979	0,447
	11/1979 – 03/2010	0,304
cement	01/1949 – 03/2010	0,301
	01/1949 – 03/2010	0,295
cement_tc	01/1949 – 12/1963	0,146
	01/1964 – 03/2010	0,270
	01/1949 – 03/2010	0,196
electri	01/1949 – 03/2010	0,198
	01/1949 – 03/2010	0,198
electri_tc	01/1949 – 10/1983	0,239
	11/1983 – 03/2010	0,126
	01/1949 – 03/2010	0,360
cars	01/1949 – 03/2010	0,359
	01/1949 – 03/2010	0,359
cars_tc	01/1949 – 05/1984	0,340
	06/1984 – 03/2010	0,285
	01/1949 – 03/2010	0,350
prod	01/1949 – 03/2010	0,353
	01/1949 – 03/2010	0,353
prod_tc	01/1949 – 10/1983	0,424
	11/1983 – 03/2010	0,252
	01/1949 – 03/2010	0,252

<sup>6</sup> Wymiar fraktalny nie oznacza zawsze wykładnika Hursta, który jest jednym ze sposobów liczenia takiego wymiaru.

cd. tab. 2

Symbol szeregu	Okres	Wykładnik Hursta
inv	01/1949 – 03/2010	0,372
inv_tc	01/1949 – 03/2010	0,371
	01/1949 – 11/1955	0,644
	12/1955 – 06/1981	0,333
	07/1981 – 03/2010	0,276
row	01/1949 – 03/2010	0,406
row_tc	01/1949 – 03/2010	0,409
	01/1949 – 12/1999	0,409
	01/2000 – 03/2010	0,207
consum	01/1949 – 03/2010	0,327
consum_tc	01/1949 – 03/2010	0,325
	01/1949 – 06/1968	0,323
	07/1968 – 03/2010	0,269
export	01/1949 – 03/2010	0,300
export_tc	01/1949 – 03/2010	0,304
	01/1949 – 04/1957	0,291
	05/1957 – 09/1995	0,131
	10/1995 – 03/2010	0,252
import	01/1949 – 03/2010	0,324
import_tc	01/1949 – 03/2010	0,319
	01/1949 – 04/1963	0,141
	05/1963 – 05/1984	0,254
	06/1984 – 03/2010	0,319
employ	01/1949 – 03/2010	0,521
employ_tc	01/1949 – 03/2010	0,526
	01/1949 – 06/1978	0,524
	07/1978 – 03/2010	0,615
unemploy	01/1949 – 03/2010	0,613
unemploy_tc	01/1949 – 03/2010	0,609
	01/1949 – 11/1966	0,335
	12/1966 – 03/2010	0,648
cen_dyn	01/1949 – 04/2010	0,520
cen_dyn_tc	01/1949 – 04/2010	0,528
	01/1949 – 11/1967	0,268
	12/1967 – 04/2010	0,573



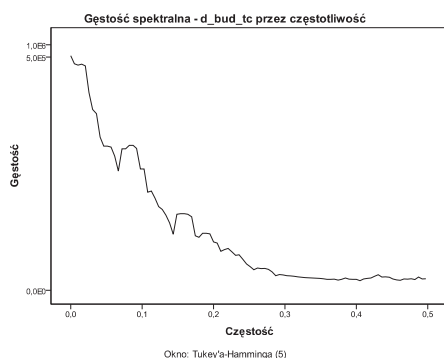
cd. tab. 2

Symbol szeregu	Okres	Wykładnik Hursta
vacan	10/1954 – 04/2010	0,658
vacan_tc	10/1954 – 04/2010	0,656
	10/1954 – 02/2005	0,668
	03/2005 – 04/2010	0,448
turn_n	10/1954 – 03/2010	0,234
turn_n_tc	10/1954 – 03/2010	0,234
turn_r	10/1954 – 03/2010	0,245
turn_r_tc	10/1954 – 03/2010	0,248
pr_bud	01/1967 – 06/2010	0,374
pr_bud_tc	01/1967 – 06/2010	0,495
	01/1967 – 03/1983	0,519
	04/1983 – 06/2010	0,559
d_bud	01/1967 – 06/2010	0,676
d_bud_tc	01/1967 – 06/2010	0,803
	01/1967 – 03/1983	0,851
	04/1983 – 06/2010	0,752
pr_prz	01/1969 – 06/2010	0,476
pr_prz_tc	01/1969 – 06/2010	0,607
	01/1969 – 12/1977	0,778
	01/1978 – 06/2010	0,674
d_prz	01/1969 – 06/2010	0,690
d_prz_tc	01/1969 – 06/2010	0,809
pr_cen	01/1969 – 06/2010	0,285
pr_cen_tc	01/1969 – 06/2010	0,422

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Benoit ver. 1.31, TrueSoft Int'l Inc. 1999.

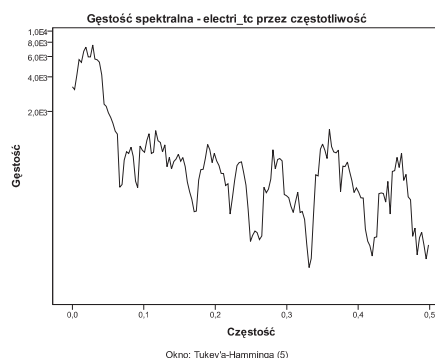
Wykładnik Hursta ( $He$ ) badanych procesów waha się w przedziale od 0,126 do 0,851. Procesy o wykładniku  $He = 0,5$  można uznać za procesy w dużym stopniu chaotyczne albo też w dużym stopniu obciążone zmianami typu losowego. W przypadku d\_bud\_tc (diagnoza koniunktury w budownictwie po korekcie sezonowej w podokresie 01/1967-03/1983) proces fraktalny opisuje wykładnik Hursta  $He = 0,851$ . Oznacza to, że mamy do czynienia z procesem persystentnym ( $0,5 < He \leq 1$ ) wyposażonym w pamięć długoterminową i mającym tendencję do powielania bieżącego trendu (ang. *trend reinforcing time series*). W danym przypadku analiza spektralna ujawnia istotne wahania o okresie 12 miesięcy jako wahania o najniższej częstotliwości, a wahania 6-miesięczne jako

wysokoczęstościowe. Dla porównania, wykładnik Hursta dla dynamiki produkcji energii elektrycznej w podokresie 11/1983-03/2010 wyniósł  $He = 0,126$ . Oznacza to, że dany proces fraktalny jest procesem antypersystentnym ( $0 \leq He < 0,5$ ), mającym tendencję do odwracania bieżącego trendu (ang. *mean reverting system*), co jest cechą układów powracających do średniej. Dynamikę podobnych procesów cechuje tzw. długoterminowa korelacja ujemna: nieduże wartości indeksu najczęściej występują bezpośrednio po dużych, duże zaś po małych. Brak w tym wypadku dłuższych ciągów wartości indeksu występujących po jednej stronie średniej. Analiza spektralna ujawnia wahania długookresowe, przy czym wyraźnie zaznacza się wkład wahań krótkookresowych w ogólną dynamikę procesu.



Rys. 10. Analiza spektralna diagnozy budownictwa (01/1967-03/1983 po korekcje)

Źródło: obliczenia własne.

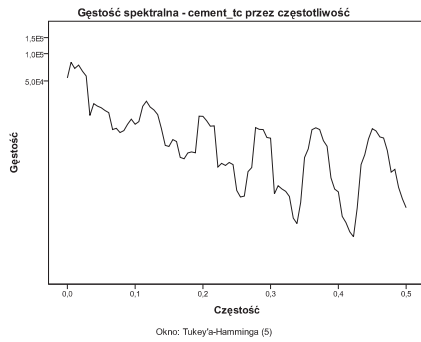


Rys. 11. Analiza spektralna dynamiki produkcji energii elektrycznej (11/1983-03/2010 po korekcje)

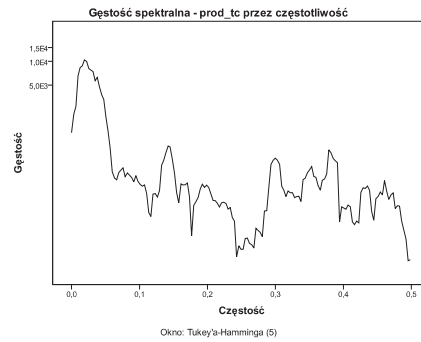
Źródło: obliczenia własne.

Wskazaną prawidłowość można prześledzić na wykresach funkcji gęstości spektralnej dynamiki procesów gospodarczych w różnych okresach (po korekcje sezonowej). Wykresy 12-21 opisują strukturę harmoniczną antypersystentnych procesów fraktalnych ( $0,131 \leq He \leq 0,269$ ), natomiast wykresy 22-31 zawierają przebiegi funkcji gęstości spektralnej persystentnych procesów fraktalnych ( $0,607 \leq He \leq 0,809$ ).

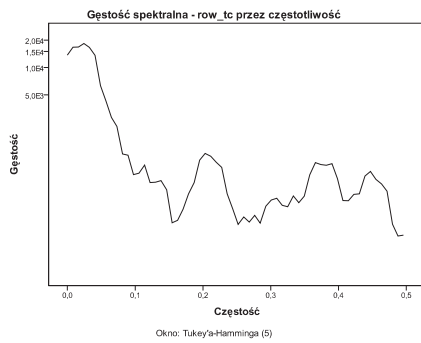
Poza wskazaną tendencją zaniku, wraz ze wzrostem wykładnika Hursta, wahań wysokoczęstościowych, funkcja gęstości spektralnej wykazuje bardziej gładki przebieg. Różnica pomiędzy procesami o względnie wysokim wymiarze fraktalnym (tj. niskim wykładniku Hursta) a procesami o niskim wymiarze fraktalnym ujawnia się w tzw. portretach fazowych.



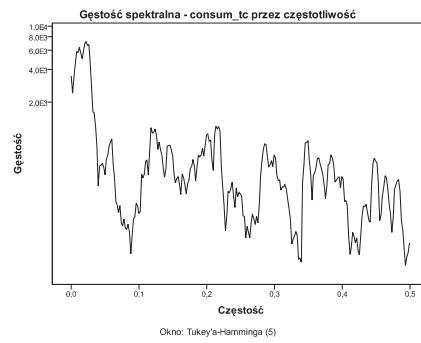
Rys. 12. Analiza spektralna produkcji cementu (01/1949-12/1963)  
Źródło: obliczenia własne.



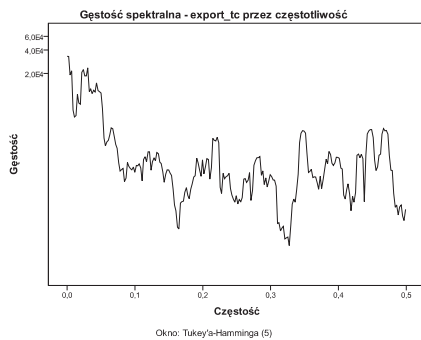
Rys. 13. Analiza spektralna produkcji przemysłowej (11/1983-03/2010)  
Źródło: obliczenia własne.



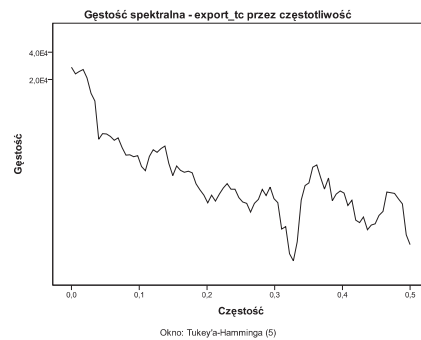
Rys. 14. Analiza spektralna produkcji surowców (01/2000-03/2010)  
Źródło: obliczenia własne.



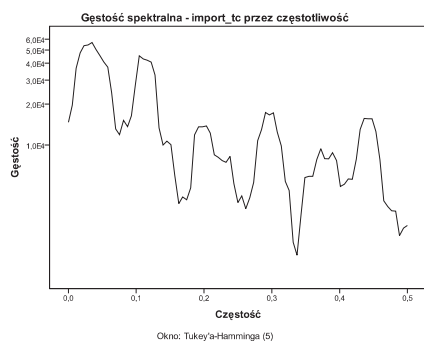
Rys. 15. Analiza spektralna produkcji dóbr konsumpcyjnych (07/1968-03/2010)  
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 16. Analiza spektralna wolumenu eksportu (05/1957-09/1995)  
Źródło: obliczenia własne.

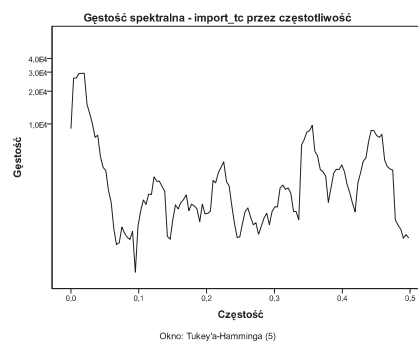


Rys. 17. Analiza spektralna wolumenu eksportu (10/1995-03/2010)  
Źródło: obliczenia własne.



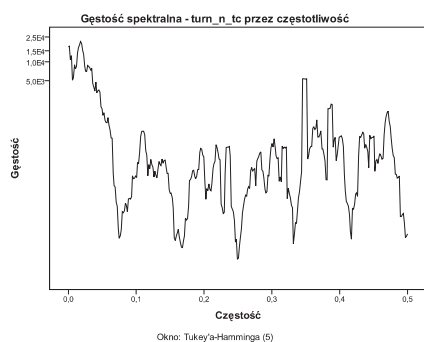
Rys. 18. Analiza spektralna wolumenu importu (01/1949-04/1963)

Źródło: obliczenia własne.



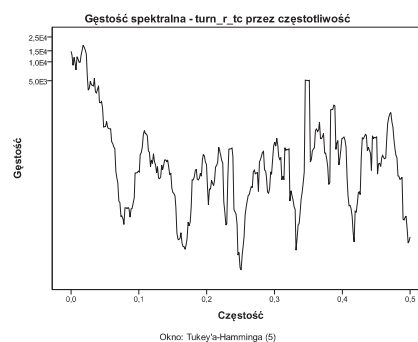
Rys. 19. Analiza spektralna wolumenu importu (05/1963-05/1984)

Źródło: obliczenia własne.



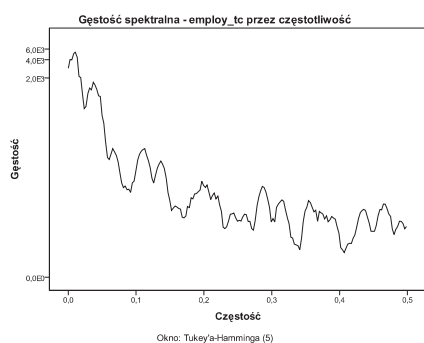
Rys. 20. Analiza spektralna nominalnych obrotów przemysłu (10/1954-03/2010)

Źródło: obliczenia własne.



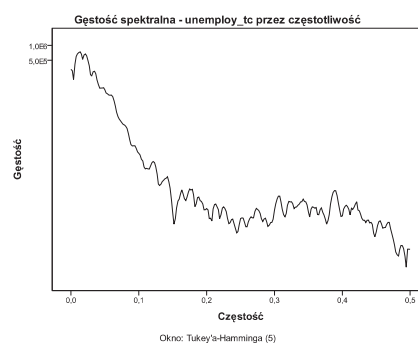
Rys. 21. Analiza spektralna realnych obrotów przemysłu (10/1954-03/2010)

Źródło: obliczenia własne.



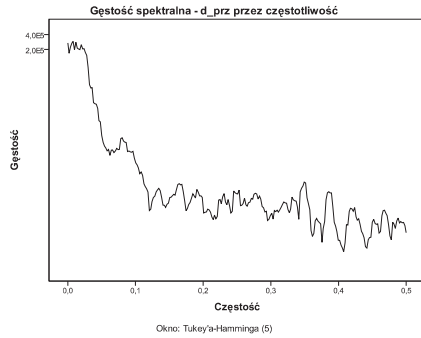
Rys. 22. Analiza spektralna zatrudnienia w przemyśle (07/1978-03/2010)

Źródło: obliczenia własne.



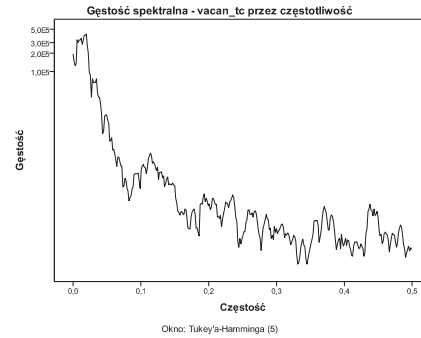
Rys. 23. Analiza spektralna bezrobocia ogółem (12/1966-03/2010)

Źródło: obliczenia własne.



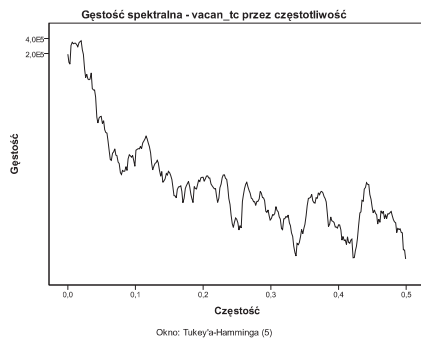
Rys. 24. Analiza spektralna diagnozy produkcji przemysłowej (01/1969-06/2010)

Źródło: obliczenia własne.



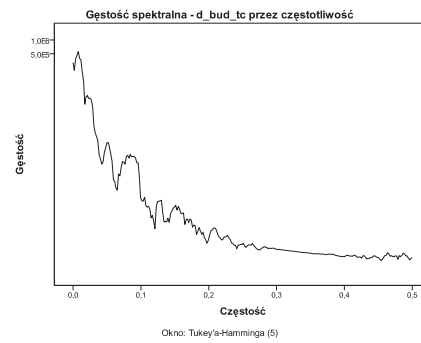
Rys. 25. Analiza spektralna wolnych miejsc pracy (10/1954-04/2010)

Źródło: obliczenia własne.



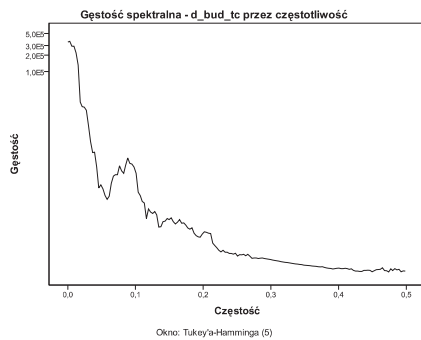
Rys. 26. Analiza spektralna wolnych miejsc pracy (10/1954-02/2005)

Źródło: obliczenia własne.



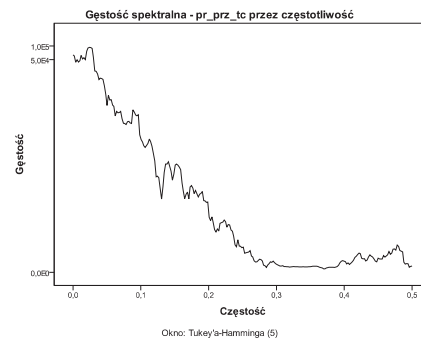
Rys. 27. Analiza spektralna diagnozy budownictwa (01/1967-06/2010)

Źródło: obliczenia własne.



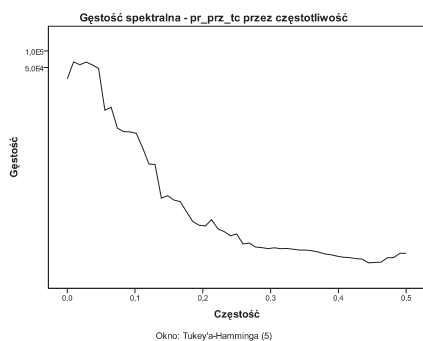
Rys. 28. Analiza spektralna diagnozy budownictwa (04/1983-06/2010)

Źródło: obliczenia własne.



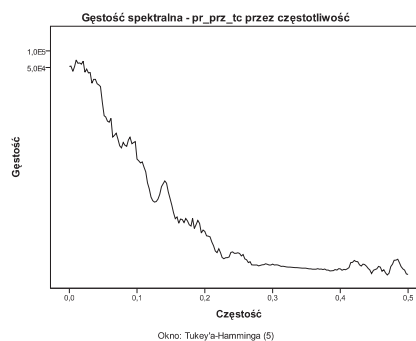
Rys. 29. Analiza spektralna prognozy produkcji przemysłowej (01/1969-06/2010)

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 30. Analiza spektralna prognozy produkcji przemysłowej (01/1969-12/1977)

Źródło: obliczenia własne.

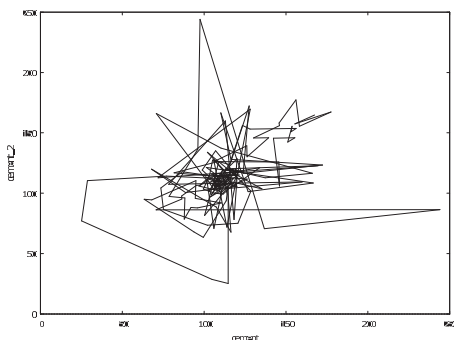


Rys. 31. Analiza spektralna prognozy produkcji przemysłowej (01/1978-06/2010)

Źródło: obliczenia własne.

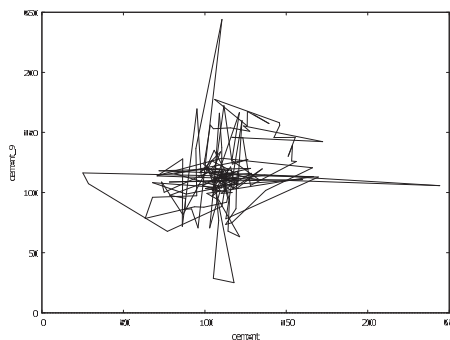
W poniższych ilustracjach zastosowano wspomnianą wyżej metodę Packarda-Takensa, przy czym rozmiar wybranego opóźnienia (przyspieszenia) ustalony został na podstawie przebiegu funkcji gęstości spektralnej.

Dziwne atraktory procesów ekonomicznych określają ich podstawowe dynamiki. Zmiany dynamiki są wyraźnie nieregularne. Jednak równie wyraźnie zaznaczają się w portretach fazowych procesów fraktalnych obszary zachowań mniej lub bardziej regularnych (samopodobnych). Im większy jest wykładnik Hursta



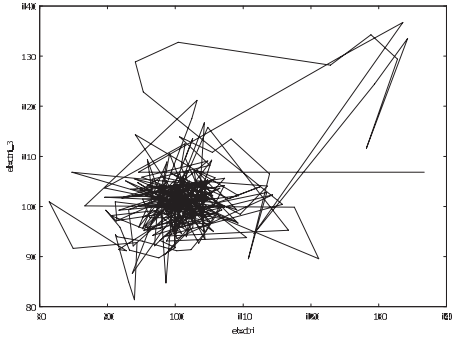
Rys. 32. Portret fazowy produkcji cementu (01/1949-12/1963, lag = 2)

Źródło: obliczenia własne.

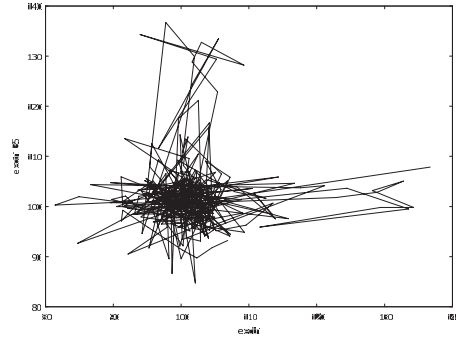


Rys. 33. Portret fazowy produkcji cementu (01/1949-12/1963, lag = 9)

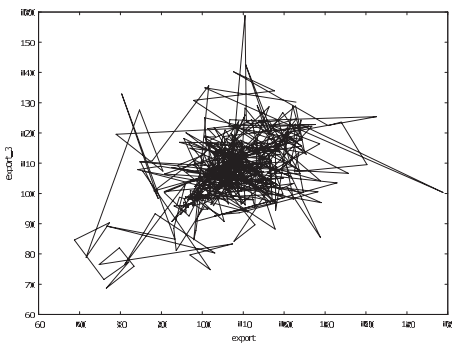
Źródło: obliczenia własne.



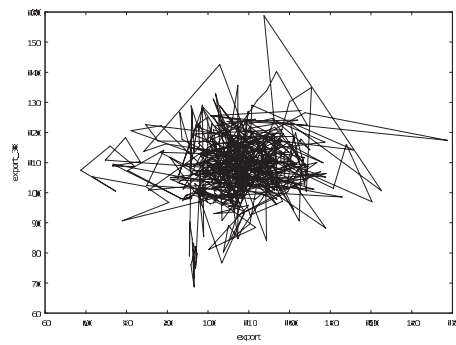
Rys. 34. Portret fazowy produkcji energii elektrycznej (11/1983-03/2010, lag = 3)  
Źródło: obliczenia własne.



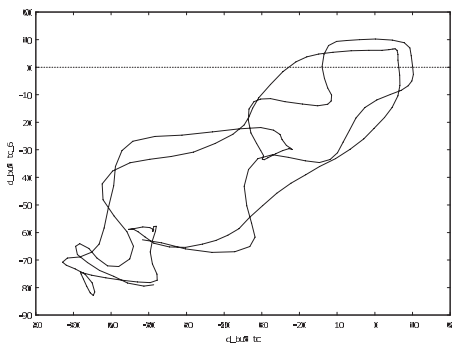
Rys. 35. Portret fazowy produkcji energii elektrycznej (11/1983-03/2010, lag = 35)  
Źródło: obliczenia własne.



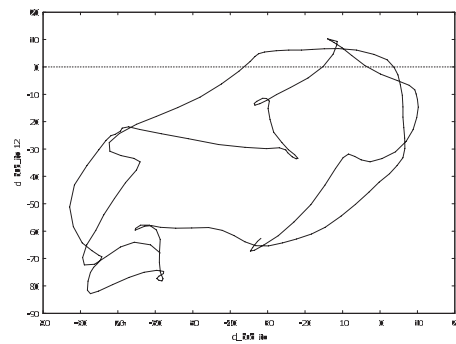
Rys. 36. Portret fazowy wolumenu eksportu (05/1957-09/1995, lag = 3)  
Źródło: obliczenia własne.



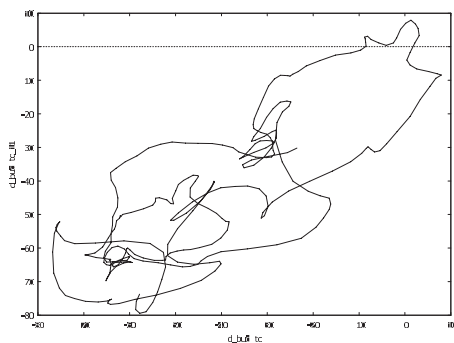
Rys. 37. Portret fazowy wolumenu eksportu (05/1957-09/1995, lag = 33)  
Źródło: obliczenia własne.



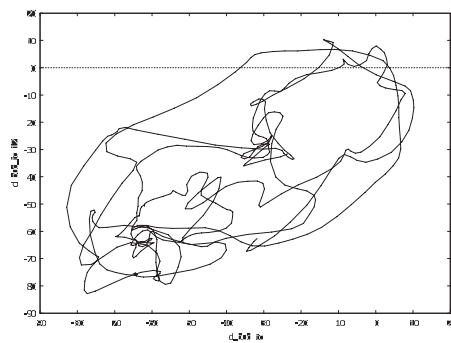
Rys. 38. Portret fazowy diagnozy budownictwa (01/1967-03/1983, lag = 6)  
Źródło: obliczenia własne.



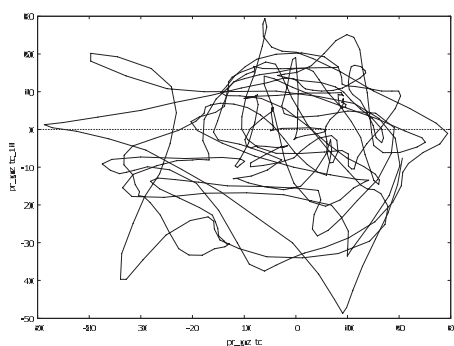
Rys. 39. Portret fazowy diagnozy budownictwa (01/1967-03/1983, lag = 12)  
Źródło: obliczenia własne.



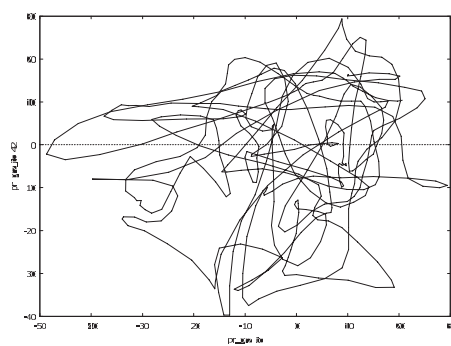
Rys. 40. Portret fazowy diagnozy  
budownictwa  
(04/1983-06/2010, lag = 11)  
Źródło: obliczenia własne.



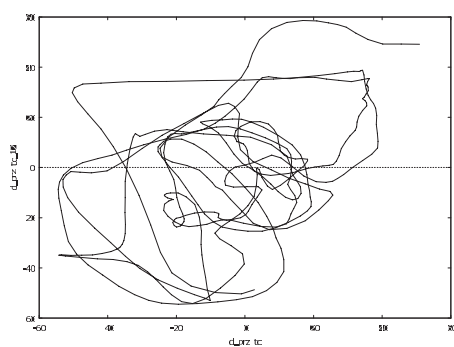
Rys. 41. Portret fazowy diagnozy  
budownictwa  
(01/1967-06/2010, lag = 12)  
Źródło: obliczenia własne.



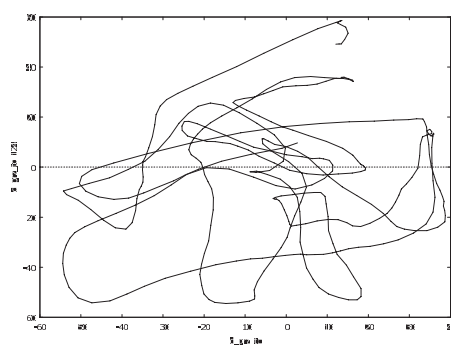
Rys. 42. Portret fazowy prognozy  
produkcji przemysłowej  
(01/1969-06/2010, lag = 11)  
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 43. Portret fazowy prognozy  
produkcji przemysłowej  
(01/1969-06/2010, lag = 42)  
Źródło: obliczenia własne.

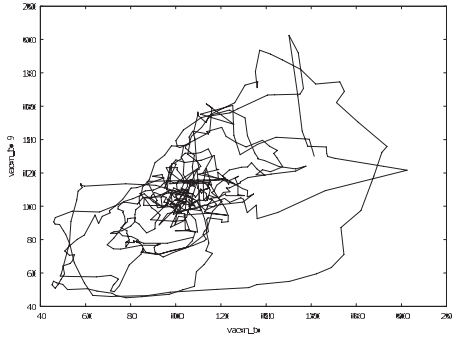


Rys. 44. Portret fazowy prognozy  
produkcji przemysłowej  
(01/1969-06/2010, lag = 12)  
Źródło: obliczenia własne.

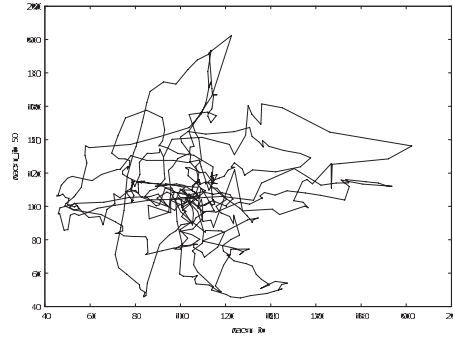


Rys. 45. Portret fazowy prognozy  
produkcji przemysłowej  
(01/1969-06/2010, lag = 124)  
Źródło: obliczenia własne.

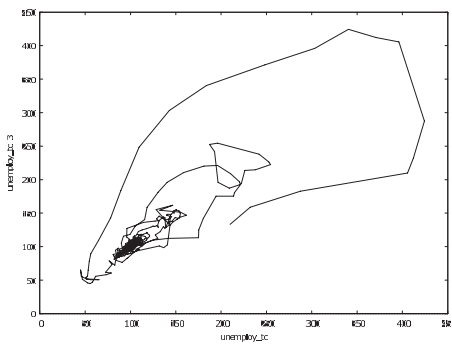




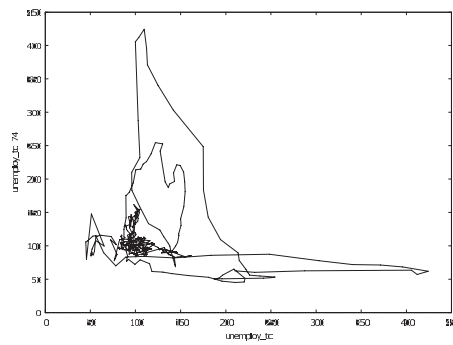
Rys. 46. Portret fazowy wolnych miejsc pracy  
(10/1954-02/2005, lag = 9)  
Źródło: obliczenia własne.



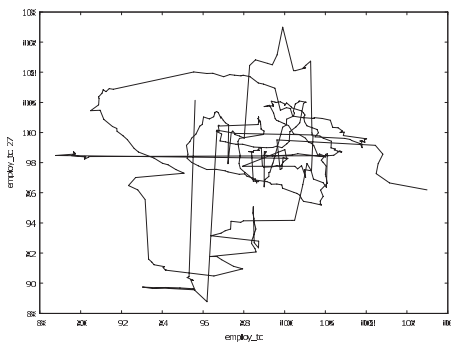
Rys. 47. Portret fazowy wolnych miejsc pracy  
(10/1954-02/2005, lag = 50)  
Źródło: obliczenia własne.



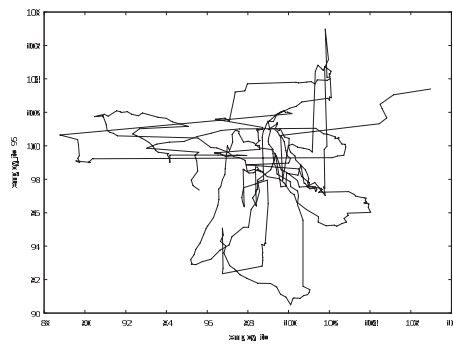
Rys. 48. Portret fazowy bezrobocia  
(12/1966-03/2010, lag = 3)  
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 49. Portret fazowy bezrobocia  
(12/1966-03/2010, lag = 74)  
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 50. Portret fazowy zatrudnienia w przemyśle  
(07/1978-03/2010, lag = 27)  
Źródło: obliczenia własne.



Rys. 51. Portret fazowy zatrudnienia w przemyśle  
(07/1978-03/2010, lag = 95)  
Źródło: obliczenia własne.

(tzn. im mniejszy jest wymiar fraktalny), tym wyraźniej zaznaczają się obszary przyciągania na uzyskanych portretach fazowych (rys. 38-51). I przeciwnie, im wyższy wymiar fraktalny, tym bardziej dziwne atraktory odbiegają od wzorcowego (rys. 2-3) przebiegu regularnego i stają się mniej przejrzyste (rys. 32-37). Warto jednak zauważyć, że dziwne atraktory (ich portrety fazowe) nie rozkładają się równomiernie, lecz tworzą wyraźne obszary przyciągania.

## Wnioski

Procesy gospodarcze cechuje samopodobieństwo, co wyraża się przez tworzenie w przestrzeni fazowej dziwnych atraktorów. Dziwne atraktory są nieokresowe i mają różne wymiary fraktalne. Nie wychodzą przy tym poza określone obszary przestrzeni fazowej. Procesy o takich charakterystykach można zaliczyć do nieliniowych systemów chaotycznych, gdzie o „dokładności” można mówić tylko w przybliżeniu. Ludwig von Mises słusznie zauważył, że „Sposobem zrozumienia zasad ludzkiego działania są badania ilościowe, które na płaszczyźnie fizycznej dopuszczają – tylko w przybliżeniu – pewną «dokładność». W sferze ludzkiego działania nie istnieją żadne stałe relacje między poszczególnymi wielkościami”<sup>7</sup>. Nasze badanie to potwierdza.

## Literatura

- Fractal Forms*, ed. E. Guyon and H.E. Stanley, Elsevier/North-Holland, Palais De La Découverte, Haarlem 1991.
- Gleick J., *Chaos. Narodziny nowej nauki*, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań 1996.
- Kufel T., *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*, wyd. 2 zm., Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- Maddala G.S., *Ekonometria*, red. naukowy przekładu M. Gruszczyński, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- Mises L. von, *Ludzkie działanie. Traktat o ekonomii*, przekład W. Falkowski, Wydawnictwo Instytutu Ludwiga von Misesa, Warszawa 2007.
- Mises L. von, *Wspomnienia. Wraz z kompletną bibliografią autora*, przekład S. Sękowski (współpraca: M. Zdziechowska), Fijor Publishing, Warszawa 2007.
- Nowiński M., *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2007.

<sup>7</sup> L. von Mises, *Wspomnienia. Wraz z kompletną bibliografią autora*, Fijor Publishing, Warszawa 2007, s. 176-177.

- Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997.
- Papla D., *Deterministyczny chaos – zarys metodologii i badania empiryczne dla GPW w Warszawie*, w: *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, red. K. Jajuga, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000, s. 101-198.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., *Granice chaosu. Fraktale*, cz. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., *Granice chaosu. Fraktale*, cz. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
- Peters E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe. Nowe spojrzenie na cykle, ceny i ryzyko*, przekład K. Środa, WIG-Press, Warszawa 1997.
- Prigogine I., *Kres pewności. Czas, chaos i nowe prawa natury*, Wydawnictwo W.A.B. i Wydawnictwo CIS, Warszawa 2000.
- Schuster G H., *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- Steward I., *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
- Stewart I., *Liczby natury*, Wydawnictwo CIS, Warszawa 1996.
- Syczewska E.M., *Analiza relacji długookresowych: estymacja i weryfikacja*, SGH w Warszawie, Warszawa 2002.
- Tempczyk M., *Teoria chaosu a filozofia*, Wydawnictwo CIS, Warszawa 1998.
- Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, WNT, Warszawa 1998.

## Załącznik<sup>8</sup>

**Wykładnik Hursta ( $H$ )** określany jest także jako miara stopnia samopodobieństwa (przy założeniu niezależności od czasu) i jest miarą obciążenia w ułamkowym ruchu Browna. Opisywany przez niego proces stochastyczny określany jest jako fraktalny ruch Browna. Odwrotność wykładnika  $H$  równa się wykładnikowi charakterystycznemu rozkładów fraktalnych (czyli paretońskich). Wymiar fraktalny szeregu czasowego  $D = 2 - H$ .

**Analiza przeskalowanego zakresu  $R/S$**  wprowadzona przez H.E. Hursta (1951) dla szeregu  $n$  przyrostów analizowanego procesu w celu ustalenia efektów długotrwałej pamięci i ułamkowego ruchu Browna. Mierzy sposób zwiększania się zakresu ruchu cząsteczki w miarę zwiększania skali czasowej. W ruchu

<sup>8</sup> Zob. E.E. Peters, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WigPress, Warszawa 1997, s. 141-247; M. Nowiński, *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2007, s. 326-337; A.Weron, R.Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998, s. 323-326; G.S. Maddala, *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 578.

Browna zakres ten zwiększa się proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego czasu. Analiza  $R/S$  oparta jest na pojęciu przeskalowanego zakresu, który wyraża się wzorem:  $E(R/S)_n = cn^H$ , gdzie  $c$  jest dodatnią stałą, a  $H$  – wykładnikiem Hursta. Aby obliczyć  $H$ , należy początkowo dla różnych  $n$  wyznaczyć  $E(R/S)$ . Następnie, logarytmując powyższe równanie, rozwiązać je stosując regresję liniową:  $\ln[E(R/S)_n] = \ln(c) + H\ln(n)$ . Współczynnik kierunkowy  $H$  jest wykładnikiem Hursta.

**Wymiar fraktalny** jest miarą samopodobnych obiektów geometrycznych. Liczba opisuje sposób, w jaki obiekty wypełniają przestrzeń. Początkowo był utożsamiany z wymiarem Hausdorffa, współcześnie oznacza się go jako bardziej ogólną miarę, określającą tempo przyrostu objętości obiektu fraktalnego w miarę redukcji skali pomiarowej.

**Analiza spektralna** albo analiza widmowa szeregu czasowego sprawdza, jak wariancja szeregu czasowego rozkłada się między oscylacjami o różnych częstotliwościach. Bada się widmo mocy szeregu, rozumiane jako wielkość mocy danego szeregu czasowego przypadające na jednostkę częstotliwości. Widmo mocy liczy się także jako kwadrat normy transformaty Fouriera badanego szeregu.

**Teoria chaosu.** Chaos deterministyczny – nieregularne zachowanie układu dynamicznego, którego wyniki wyglądają na losowe. Zachowanie chaotyczne nie może wynikać z zakłóceń zewnętrznych lub z nieskończonej liczby stopni swobody układu. System chaotyczny musi mieć wymiar fraktalny i być wrażliwy na zmiany warunków początkowych.

**Dziwny atraktor** – atraktor, opisujący długookresowe zachowanie dysypatywnych układów dynamicznych. Dziwne atraktory cechuje własność samopodobieństwa, są one nieookresowe i mają wymiar fraktalny. W teorii jest to ciągła krzywa, ograniczona określonym obszarem przestrzeni fazowej, nieprzecinająca się ze sobą i niezblizająca się do siebie na pewną niewielką odległość.