

Andrzej Stryjek

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Użyteczność kopuli w finansach i ubezpieczeniach

Streszczenie. Powszechnie stosowaną miarą zależności między dwiema zmiennymi losowymi jest współczynnik korelacji liniowej, który jest dobrą miarą zależności w klasie rozkładów eliptycznych. Zależność wśród zmiennych używanych w modelach w finansach i ubezpieczeniach jest bardzo często zależnością nieliniową. Jedną z możliwości jej wyrażenia jest kopula. Prezentowany artykuł opisuje, czym jest kopula i przedstawia dwa modele oparte na pojęciu kopuli (model szacowania ryzyka zabezpieczonych zobowiązań dłużnych oraz wartości zagrożonej). Autor prezentuje ostatnie wyniki z literatury przedmiotu oraz wskazuje na nowe regulacje w zarządzaniu ryzykiem (Nowa Umowa Kapitałowa, Wyplacalność II), które zachęcają do szukania lepszych rozwiązań modelowania zależności zmiennych losowych.

Słowa kluczowe: kopula, zależność zmiennych losowych, zabezpieczone zobowiązanie dłużne, wartość zagrożona (VaR), Nowa Umowa Kapitałowa, Wyplacalność II

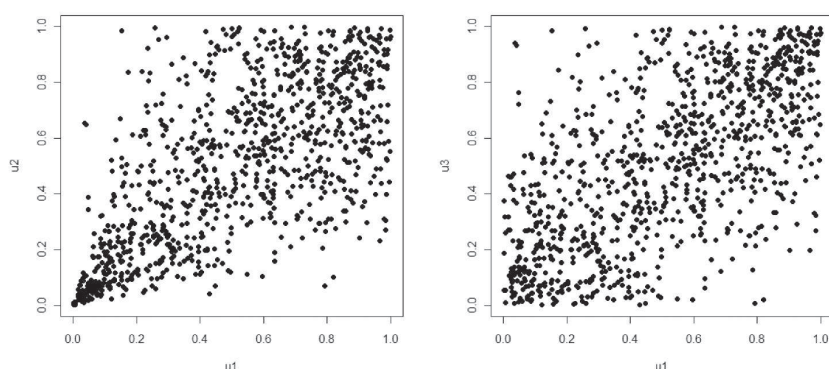
Wstęp

W modelach ilościowych stosowanych w finansach i ubezpieczeniach bardzo ważną rolę odgrywają zmienne losowe. Jest to bowiem matematyczny sposób

opisania tych aspektów badanego zagadnienia, które nie są deterministyczne. Ponieważ wynik analizowanego zagadnienia nie jest znany z całkowitą pewnością, następuje konieczność ujęcia go w kategoriach prawdopodobieństwa. I wtedy w naturalny sposób pojawia się pytanie o to, jaki jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej występującej w modelu.

Odpowiedź na tak postawione pytanie najwygodniej uzyskać przez estymację rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej za pomocą metod statystycznych. Statystyka i ekonometria dostarczają wielu metod szacowania rozkładu prawdopodobieństwa jednowymiarowej zmiennej losowej. Często okazuje się, że analizowane zagadnienie lepiej modelować za pomocą kilku zmiennych losowych. Może to być np. problem ubezpieczenia grupy osób lub oszacowania stopy zwrotu portfela złożonego z kilku rodzajów instrumentów finansowych. Mamy wówczas do czynienia z wielowymiarową zmienną losową oraz jej rozkładem. Wyznaczenie takiego rozkładu lub przynajmniej jego parametrów jest oczywiście trudniejsze niż dla zmiennej jednowymiarowej.

Przykładem dobrze opisanego rozkładu wielowymiarowego jest rozkład normalny. Wiadomo, że powstaje on na zasadzie afinicznego przekształcenia wektora zmiennych losowych o standardowych, jednowymiarowych rozkładach normalnych. Związek tych rozkładów brzegowych z rozkładem wielowymiarowym podany jest przez wektor wartości oczekiwanych oraz macierz korelacji. Okazuje się, że macierz korelacji, jako miara związków między rozkładem wielowymiarowym a rozkładami brzegowymi, jest dobrą miarą tylko w klasie tzw. rozkładów eliptycznych. W innych przypadkach tak nie jest, o czym może świadczyć przykład przedstawiony na rysunku 1. Jak widać, zależność w parze zmiennych (u_1, u_2) ma inny charakter niż w parze (u_1, u_3) , mimo że obie pary mają równe współczynniki korelacji, a zmienne u_1, u_2, u_3 mają jednostajne rozkłady na odcinku $[0,1]$.



Rys. 1. Wykresy rozrzutu dla dwóch próbek o tym samym współczynniku korelacji liniowej i takich samych rozkładach brzegowych

Źródło: opracowanie własne.

Jedną z możliwości badania wielowymiarowych rozkładów zmiennych występujących w modelach z zakresu finansów i ubezpieczeń są kopule. Celem prezentowanego artykułu jest przybliżenie pojęcia kopuli oraz zachęcenie do dyskusji o możliwych obszarach jego zastosowania.

1. Pojęcie kopuli

Termin kopula w polskiej literaturze jest stosowany rzadko. Częściej mowa jest o funkcji połączeń, funkcji powiązań lub funkcji łączącej. Wszystkie te terminy są poprawne, ponieważ słowo kopula pochodzi z łaciny i oznacza tyle co łącznik. W literaturze anglojęzycznej używany jest termin *copula*, dlatego też w artykule będzie używany polski odpowiednik – kopula¹.

W statystyce kopule pojawiły się w połowie dwudziestego wieku. Obecnie można powiedzieć, że przeżywają swój renesans. Fakt ten wynika z obecnych możliwości symulacji komputerowych. Niestety w obszarze kopuli otrzymanie pewnych wyników na drodze analitycznej jest albo bardzo skomplikowane, albo niemożliwe.

Czym zatem jest kopula? Najogólniej mówiąc, to funkcja, która łączy rozkłady brzegowe z rozkładem prawdopodobieństwa wielowymiarowej zmiennej losowej. A dokładniej, dwuwymiarowa kopula to każda dystrybuanta C zmiennej losowej (U_1, U_2) , która jest obcięta do domkniętego kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$, przy czym oba rozkłady brzegowe U_1 i U_2 są jednostajne na przedziale $[0, 1]$.

Powyższą definicję można zapisać bardziej formalnie. Dwuwymiarowa kopula to funkcja $C: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$, która spełnia warunki:

- 1) $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ dla dowolnych $u, v \in [0, 1]$,
- 2) $C(u, 1) = u$ oraz $C(1, v) = v$ dla dowolnych $u, v \in [0, 1]$,
- 3) $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$ dla $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ oraz $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$.

Określona w powyższy sposób funkcja C jest istotnie połączeniem między rozkładami brzegowymi a rozkładem łącznym dwuwymiarowej zmiennej losowej. Własność ta jest konsekwencją następującego twierdzenia (Sklar 1959).

Dla jednowymiarowych zmiennych losowych X i Y o dystrybuantach, odpowiednio, $F_1(x)$ i $F_2(y)$ oraz dla dowolnych $(x, y) \in \mathfrak{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ zachodzi:

- 1) jeżeli funkcja C jest kopulą, to $C(F_1(x), F_2(y))$ jest dystrybuantą łącznego rozkładu wektora (X, Y) o rozkładach brzegowych zadanych dystrybuantami $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$;

¹ Kopula jest terminem występującym w gramatyce języka polskiego.

- 2) jeżeli $F(x, y)$ jest dystrybuantą łącznego rozkładu wektora (X, Y) o rozkładach brzegowych zadanych dystrybuantami $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$, to istnieje dokładnie jedna kopula C taka, że $F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$.

Na zakończenie warto zauważyć, że kopula w prosty sposób uogólnia się z przypadku dwuwymiarowej zmiennej losowej do przypadku n -wymiarowej zmiennej. Uogólnienie to rodzi szereg komplikacji na etapie szacowania i kalibrowania parametrów czy nawet symulowania wartości kopuli. Z punktu widzenia tematyki artykułu nie ma potrzeby posługiwania się w dalszej części n -wymiarowymi kopulami.

2. Zabezpieczone zobowiązanie dłużne

W połowie roku 2007 w wielu krajach świata rozpoczął się kryzys na rynkach finansowych. W licznych publikacjach opisujących przyczyny jego powstania pojawiają się instrumenty o nazwie: zabezpieczone zobowiązania dłużne (*collateralized debt obligation* – CDO) oraz wzmianki na temat modelu matematycznego, który służył do wyceny ich ryzyka. Ryzyko CDO wyceniano przy wykorzystaniu kopuli gaussowskiej. Zatem jest to przykład zastosowania kopuli w modelu z zakresu finansów, lecz jego nierozważne wykorzystanie skutkowało negatywnymi konsekwencjami. Z drugiej strony należy jednak zauważyć, że wydarzenia z roku 2007 były wynikiem splotu wielu okoliczności, wśród których tylko jedną było nieodpowiedzialne wykorzystanie gaussowskiego modelu wyceny oraz brak świadomości jego ograniczeń.

Główną zaletą rynku CDO było umożliwienie transferu znacznego kapitału na rynek hipoteczny z niebankowych instytucji finansowych, np. funduszy emerytalnych. Tego rodzaju instytucje mają prawo inwestować w instrumenty o stosunkowo niskim ryzyku, a co za tym idzie także niedużej stopie zwrotu. Zobowiązania zabezpieczone długiem oferowały możliwość osiągnięcia relatywnie wyższej stopy zwrotu niż instrumenty o niskim ryzyku.

Rynek instrumentów CDO jest oparty na sekurytyzacji. Banki, które w swojej działalności mogą zwiększać ryzyko tylko przy jednoczesnym zwiększeniu posiadanego kapitału, znalazły dogodny sposób na ominięcie tego przepisu, tworzyły bowiem tzw. fundusze sekurytyzacyjne (SPV). Ich zadaniem było emitowanie papierów CDO, których wykup zabezpieczony był zakupionymi zobowiązaniami kredytowymi. Papiery emitowane przez SPV były podzielone na trzy transze: *senior*, *mezzanine*, *equity*, przy czym w przypadku gdy kwota wynikająca ze spłaty zobowiązań kredytowych była mniejsza od kwoty potrzebnej do wykupu wyemitowanych papierów, wykup odbywał się w wymienionej wyżej kolejności. Zatem

instrumenty z transzy senior uważano za najmniej ryzykowne. A ponieważ fundusze sekurytyzacyjne nie podlegały takiemu nadzorowi jak banki, więc mogły tym samym zaoferować relatywnie wyższą stopę zwrotu.

Ryzyko instrumentów CDO podlegało ocenie przez agencje ratingowe. Można przypuszczać, że nie zawsze były to oceny uczciwe. Na przykład w przypadku agencji Moody's aż 80% przyrostu zysków w okresie czterech kolejnych lat wynikało z wykonania oceny ratingowej CDO².

Kluczową informacją przy ocenie ryzyka zobowiązania zabezpieczonego długiem jest prawdopodobieństwo jednoczesnego popadnięcia w niewypłacalność kilku kredytobiorców. Model szacowania tego prawdopodobieństwa podał David X. Li.

Jeżeli ograniczymy model do przypadku dwóch zobowiązań dłużnych, to sprowadzi się on do następującej postaci. Dwa zobowiązania w kwocie D_A i D_B , które zapadają w chwili T , są zabezpieczone przez dwa instrumenty finansowe o wartości A_t i B_t dla $t \in [0, T]$. Prawdopodobieństwo braku możliwości spłaty obu zobowiązań w chwili T , tj. $P(A_T \leq D_A, B_T \leq D_B)$, można wyznaczyć za pomocą kopuli Gaussa. Zakładając, że zmienna $\ln \frac{A_T}{A_0}$ ma rozkład normalny o średniej $\left(r - \frac{\sigma_{A_T}^2}{2}\right)T$ i wariancji $\sigma_{A_T}^2 T$ oraz zmienna $\ln \frac{B_T}{B_0}$ ma również rozkład normalny z parametrami, odpowiednio $\left(r - \frac{\sigma_{B_T}^2}{2}\right)T$ i $\sigma_{B_T}^2 T$, otrzymujemy

$$P(A_T \leq D_A, B_T \leq D_B) = \Phi^{Ga} \left(\phi \left(\frac{\ln \frac{A_T}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right), \phi \left(\frac{\ln \frac{B_T}{B_0} - \left(r - \frac{\sigma_B^2}{2}\right)T}{\sigma_B \sqrt{T}} \right) \right),$$

gdzie:

– $\Phi^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho xy - x^2 - y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy$ jest kopulą

Gaussa,

- parametr $\rho \in [-1, 1]$ jest współczynnikiem korelacji,
- ϕ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Użycie w modelu rozkładu normalnego oraz kopuli Gaussa (*de facto* wielowymiarowego rozkładu normalnego) było pomysłem nietrafionym, gdyż jak wiadomo rozkład normalny nie opisuje prawidłowo prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń ekstremalnych na rynkach finansowych.

² Por. A. Sławiński, *Przyczyny i konsekwencje kryzysu na rynku papierów wartościowych emitowanych przez fundusze sekurytyzacyjne* [online], Zakład Rynku Papierów Skarbowych Katedry Skarbowości Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa 2007, dostępny w internecie: http://www.rynkifinansowe.pl/subprime_CDO.pdf.

Główną przyczyną załamania się rynku CDO była niefrasobliwość przy udzielaniu kredytów hipotecznych w USA. Instytucje, które się tym zajmowały dążyły przede wszystkim do zwiększania wpływów z marż od udzielonych pożyczek. W efekcie kredyty hipoteczne trafiały także do osób, które nie miały dochodów, pracy lub majątku, a finansowały nawet 130% wartości nieruchomości³. Rynek instrumentów CDO w konsekwencji stracił płynność. Tak skrajna sytuacja nie mogła zatem znaleźć odzwierciedlenia w opisanym wyżej modelu.

Do powstania kryzysu w roku 2007 w istotny sposób przyczyniła się sekurytyzacja. W połowie tegoż roku ceny nieruchomości w USA znacznie spadły. Coraz więcej kredytobiorców przestało spłacać zaciągnięte pożyczki, a banki nie miały możliwości szybkiego sprzedania nieruchomości będących zabezpieczeniem takich kredytów. Wówczas banki zostały dotknięte dużymi stratami wynikającymi z sekurytyzacji. Po pierwsze, banki były jednym z głównych nabywców transz *mezzanine* i *equity* w funduszach sekurytyzacyjnych (w ten sposób chciały uzasadnić innym inwestorom, że instrumenty CDO były obciążone relatywnie niskim poziomem ryzyka). W przypadku załamania płynności na rynku CDO transze te nie były wykupywane, co generowało straty. Po drugie, banki będące założycielami funduszy sekurytyzacyjnych, musiały istotnie zwiększyć ich kredytowanie, aby SPV nie utraciły swojej płynności. Brak pełnego nadzoru nad funduszami spowodował, że na rynku międzybankowym wzrosła nieufność do wzajemnego udzielania pożyczek, co ostatecznie przełożyło się na wzrost stóp procentowych oraz zmniejszenie części kapitału banków przeznaczonej na kredyty dla przedsiębiorstw. Wpłynęło to na osłabienie wzrostu gospodarczego, a także zmusiło banki centralne do ratowania płynności banków komercyjnych. Rynki finansowe pogrążyły się w kryzysie.

3. Wartość zagrożona

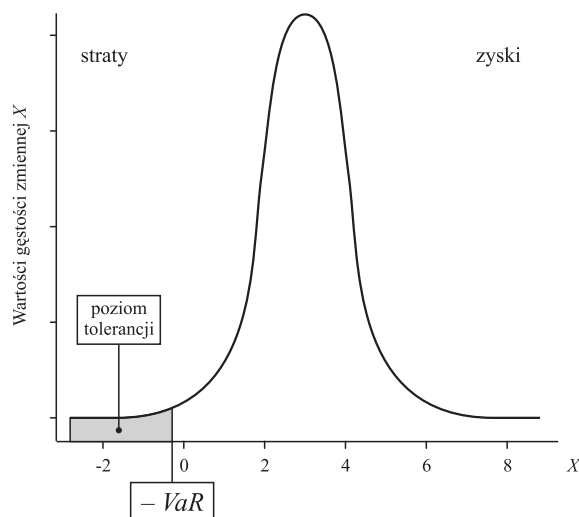
Jedną z powszechnie stosowanych miar ryzyka w bankach jest wartość zagrożona (*Value at Risk* – *VaR*). Obecnie staje się ona pewnym standardem w ocenie ryzyka nie tylko banków, lecz także innych instytucji finansowych.

W celu zdefiniowania pojęcia wartości zagrożonej wprowadza się zmienną ryzyka X , która opisuje potencjalne zyski lub straty podjętej inwestycji, przypadające na koniec horyzontu inwestycyjnego T . Wówczas wartość zagrożona zmiennej X przy założonym *a priori* poziomie tolerancji $\alpha \in (0, 1)$ to wielkość

$$VaR_{\alpha}(X) = - \sup \{x \in R: P(X \leq x) \leq \alpha\}.$$

³ Por. D. Gątarek, *Obecny kryzys nazwę kryzysem zaufania*, w: [obserwatorfinansowy.pl](http://www.obserwatorfinansowy.pl) [online], Warszawa 2010, dostęp: 14 listopada 2010, dostępny w Internecie: <http://www.obserwatorfinansowy.pl/2010/01/25/obecny-kryzys-nazwe-kryzysem-zaufania/#L>.

Innymi słowy wartość zagrożona to maksymalna możliwa strata wynikająca z ryzyka X , która może wystąpić z prawdopodobieństwem α po czasie T (rys. 2).



Rys. 2. Ilustracja wartości zagrożonej (VaR) na wykresie funkcji gęstości przykładowej zmiennej ryzyka X

Źródło: opracowanie własne.

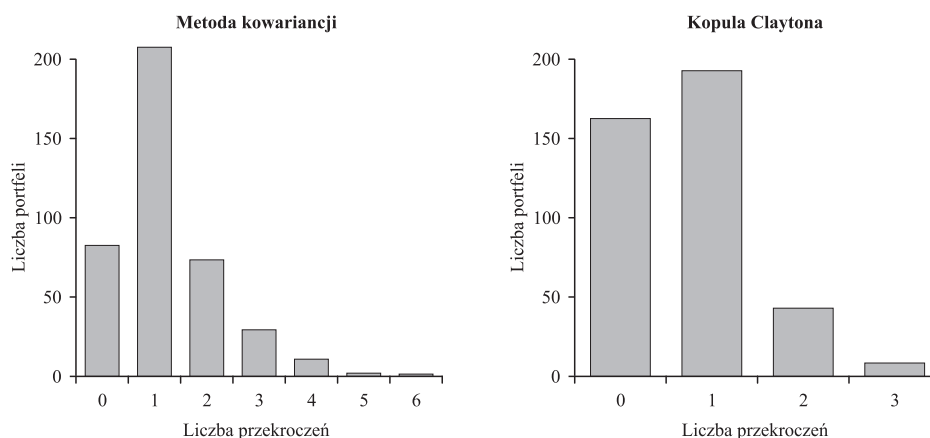
Każda instytucja finansowa jest narażona na wiele rodzajów ryzyka, co oznacza, że musi uwzględniać kilka zmiennych. Są to najczęściej zmienne, które nie mają niezależnych rozkładów. W celu wyznaczenia wartości zagrożonej należy ustalić ich łączny rozkład prawdopodobieństwa. Aktualnie podejmowane są badania nad wykorzystaniem do tego celu kopuli. Poniżej opisane są przykłady trzech prac z tego zakresu.

W pracy Claudio Romano *Applying Copula Function To Risk Management* autor bada wartość zagrożoną portfela złożonego z dziesięciu akcji notowanych na włoskiej giełdzie. Z przeprowadzonej analizy wynika, że zastosowanie kopuli Studenta i rozkładów brzegowych t -Studenta z 10 lub 20 stopniami swobody prowadzi do błędu estymacji VaR nieprzekraczającego 2%, podczas gdy wykorzystanie procedur z rozkładem normalnym generuje błąd rzędu 12,5%. Autor przez błąd estymacji rozumie względną różnicę między wartością zagrożoną, wyznaczoną za pomocą badanej metody, a wartością wynikającą z rozkładu empirycznego.

Jedną z pierwszych prac z omawianego zakresu na gruncie Polski jest artykuł Daniela Papli i Krzysztofa Piontka⁴. Autorzy analizują dwuskładnikowy

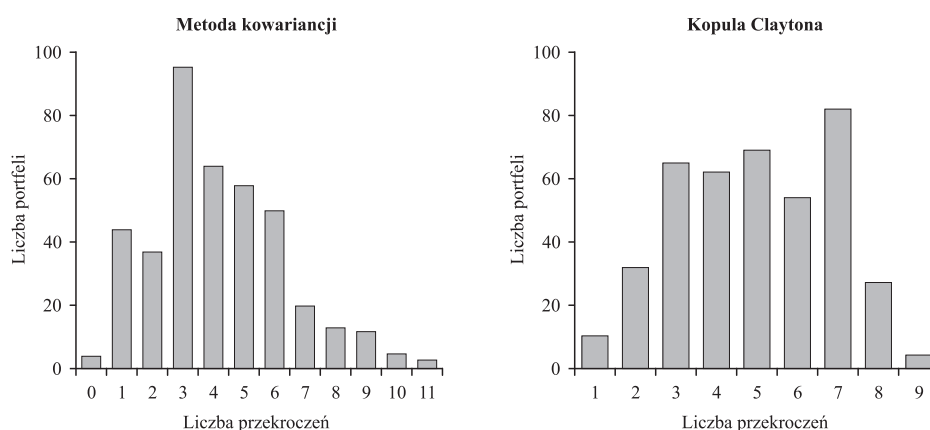
⁴ D. Papla, K. Piontek, *Zastosowanie rozkładów α -stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, w: *Wyzwania współczesnych finansów*, red. K. Jajuga, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wrocław 2009 [dostęp: 14 listopada 2010], dostępny w Internecie: http://www.kpiontek.ae.wroc.pl/DP_KP_VaR_copula.pdf.

portfel akcji Krosna i Żywca na podstawie długiego – dwuletniego – szeregu danych. Zakładają, że rozkłady brzegowe to rozkłady α -stabilne, zależność między rozkładami zaś opisują trzy kopule: Ali-Mikhail-Haq, Gumbela i Franka. Wygodną formą oceny modelu szacowania wartości zagrożonej jest wyznaczenie względnej liczby przekroczeń VaR w okresie testowym. Polega ona na tym, że szereg danych historycznych o zmianach wartości zmiennej ryzyka dzieli się na dwie części: część



Rys. 3. Liczba przekroczeń $VaR_{0,01}$ w grupie 405 badanych portfeli dla metody kowariancji i metody z zastosowaniem kopuli Claytona

Źródło: opracowanie własne na podstawie: A. Stryjek, *Zastosowanie miar zależności zmiennych losowych oraz kopuli Claytona i Gumbel-Hougaard do szacowania wartości zagrożonej*, „Przegląd Statystyczny” 2009, 3-4, s. 78.



Rys. 4. Liczba przekroczeń $VaR_{0,05}$ w grupie 405 badanych portfeli dla metody kowariancji i metody z zastosowaniem kopuli Claytona

Źródło: opracowanie własne na podstawie: A. Stryjek, wyd. cyt.

służącą do wyznaczenia parametrów potrzebnych do szacowania VaR i część umożliwiającą porównanie wyznaczonych wartości VaR z faktycznymi zmianami zmiennej ryzyka. Autorzy artykułu otrzymali względną liczbę przekroczeń $VaR_{0,05}$ w okresie testowym obejmującym 1938 dni od 5,52 do 5,88%. Standardowa procedura obliczania wartości zagrożonej, tj. metoda kowariancji, miała 6,76% przekroczeń.

W artykule Andrzeja Stryjka autor analizuje VaR za pomocą kopuli Clayтона dla 405 dwuskładnikowych portfeli akcji notowanych na GPW w Warszawie. W procedurze szacowania VaR autor proponuje uproszczenie polegające na zastosowaniu dystrybuant empirycznych rozkładów brzegowych zamiast przyjmowania tych rozkładów *a priori* lub ich estymacji. Takie podejście w stosunku do metody kowariancji zredukowało w okresie testowym liczbę przekroczeń $VaR_{0,01}$ w znaczącym stopniu (rys. 3), a dla $VaR_{0,05}$ w stopniu wystarczającym (rys. 4).

4. Nowa Umowa Kapitałowa oraz Wyplacalność II

Banki, zakłady ubezpieczeń i inne instytucje finansowe są podmiotami, które prowadzą szczególny rodzaj działalności. Wszelkie kryzysy, nieprawidłowości, które wystąpią przynajmniej u jednego z tych podmiotów powodują spadek zaufania do całego sektora, co ma oczywisty wpływ na całą gospodarkę kraju. Dlatego też ten rodzaj działalności podlega szczególnemu nadzorowi ze strony państwa.

W działalności bankowej do połowy lat siedemdziesiątych XX w. praktycznie nie miała miejsca konkurencja. Banki były w zasadzie koncesjonowane przez rządy państw i mogły korzystać z parasola ochronnego. Rozwój rynku kapitałowego oraz spekulacje na walutach wymusiły zmiany, które dokonały się po 1973 r. Zmuszenie banków do zabiegania o klientów spowodowało jednocześnie wiele nadużyć i nieprawidłowości w ich działalności. Dlatego w 1974 r. zawiązano Bazylejski Komitet ds. Regulacji Bankowości i Procedur Nadzorczych. W jego skład wchodził przedstawiciele grupy G10, Luksemburga i Hiszpanii, a jego celem było stworzenie zasad gwarantujących bezpieczeństwo i stabilność systemu bankowego.

Efektom prac Komitetu Bazylejskiego były regulacje z 1988 r. występujące pod nazwą Bazylea I (*Basel I*). „Minimalne wymogi kapitałowe, odnoszące się wówczas jedynie do ryzyka kredytowego, oparte zostały na trzech podstawowych elementach: definicji kapitału regulacyjnego, aktywów ważonych ryzykiem i minimalnego wskaźnika relacji kapitału do aktywów ważonych ryzykiem”⁵. Ustalono współczynnik wyplacalności⁶ na poziomie 8%.

⁵ Por. P. Dziekoński, *Nowa Bazylejska Umowa Kapitałowa – konsekwencje dla rynku kredytowego*, w Materiały i Studia [online], nr 164, Narodowy Bank Polski, Warszawa 2003, dostęp: 14 listopada 2010, dostępny w Internecie: http://www.nbp.pl/publikacje/materiały_i_studia/ms164.pdf.

⁶ Współczynnik wyplacalności był wówczas ilorazem funduszy własnych banku do jego aktywów i zobowiązań pozabilansowych ważonych ryzykiem.

W roku 1996 znowelizowano regulacje Bazylea I, m.in. przez dodanie kontroli ryzyka rynkowego oraz dopuszczenie do użytku tzw. modeli wewnętrznych. Oznaczało to tyle, że oprócz dokładnie zdefiniowanych standardowych procedur wyznaczania wymogów kapitałowych, banki mogły stosować swoje modele wyceny wartości zagrożonej pod warunkiem, że spełniały one pewne ogólne ograniczenia podane przez nadzór.

Od roku 2008 obowiązuje Nowa Umowa Kapitałowa (*Basel II*), która jest modyfikacją i znacznym rozszerzeniem regulacji z lat 1988 i 1996. Konstrukcja tej umowy jest oparta na trzech filarach. Pierwszy filar to w pewnym uproszczeniu rozszerzenie Bazylei I. Mianowicie do wyznaczania współczynnika wypłacalności brane jest pod uwagę nie tylko ryzyko rynkowe i kredytowe, lecz również ryzyko operacyjne. Drugi filar to proces analizy nadzorczej, polegający na stymulowaniu banków do wdrażania coraz lepszych modeli wewnętrznych, a trzeci to dyscyplina rynkowa – banki są zobowiązane do ujawniania swoich wyników, co ma na celu zmotywowanie wszystkich uczestników do otrzymywania coraz lepszych wyników.

Analogiczny system regulacji będzie obowiązywał od 2012 r. w sferze ubezpieczeń. Dotychczasowe metody kontroli i ograniczania ryzyka zakładów ubezpieczeniowych zostaną zastąpione przez dyrektywę Wypłacalność II (*Solvency II*). Będzie się ona składać z trzech filarów. W pierwszym znajdują się rodzaje ryzyka związane z rezerwami techniczno-ubezpieczeniowymi, kapitałem własnym i lokatami ubezpieczyciela. Drugi filar będzie dotyczył ryzyka, którego pomiar ilościowy sprawia trudności oraz reguł działania instytucji nadzorczej w stosunku do zakładu ubezpieczeń. Trzeci filar to będzie gwarancja transparentności, czyli zobowiązanie do rzetelnego publikowania osiągniętych wyników.

W obu systemach kontroli i ograniczania ryzyka dominuje podejście zachęcające banki i firmy ubezpieczeniowe do rzetelnego, lecz także dostosowanego do własnych potrzeb, tworzenia wewnętrznych modeli wyceny ryzyka. Zarówno Nowa Umowa Kapitałowa, jak i Wypłacalność II jest bodźcem do poszukiwania nowych, lepszych rozwiązań modelowania nieliniowych zależności oraz prawdopodobieństw zdarzeń ekstremalnych dla wielu rodzajów ryzyka występujących w ich działalności. W modelach wewnętrznych banki i zakłady ubezpieczeń muszą uwzględnić ryzyko, które na ogół nie jest ryzykiem niezależnym. Co więcej modele wewnętrzne są oparte na opisanej w poprzednim punkcie koncepcji wartości zagrożonej. Oba te spostrzeżenia są argumentami potwierdzającymi konieczność rozwijania badań w kierunku zastosowania kopuli w modelach z zakresu finansów i ubezpieczeń.

Podsumowanie

Mimo że pojęcie kopuli zostało wprowadzone do statystyki ponad pół wieku temu, to nadal jest ono mało znane i rzadko stosowane zarówno w badaniach naukowych, jak i w modelach ilościowych wykorzystywanych przez uczestników rynku. W ostatnich latach podejmowane są próby zbadania przydatności kopuli do modelowania zależności zmiennych losowych opisujących niektóre elementy rynku finansowego. Powstaje zatem pytanie, czy kopule są użyteczne w modelach stosowanych w finansach i ubezpieczeniach?

W artykule przedstawiono dwa modele z zakresu finansów i ubezpieczeń, w których zostały użyte kopule: model wyceny ryzyka instrumentów CDO oraz model szacowania wartości zagrożonej. Oba przykłady wskazują zarówno na negatywne, jak i pozytywne wykorzystanie pojęcia kopuli. Złożoność rynków finansowych, tj. różnorodność instrumentów finansowych, globalny charakter obrotu tymi instrumentami oraz ograniczenia prawne regulujące działania uczestników rynków, zmusza do poszukiwania nowych i lepszych metod modelowania zależności występujących na tych rynkach.

Kopula wydaje się obiecującym narzędziem, chociaż podczas prób ich praktycznego zastosowania pojawia się kilka problemów. Są to przede wszystkim:

- czasochłonność procedur symulacyjnych,
- złożoność procedur symulacyjnych w przypadku większej liczby zmiennych,
- trudności w wyborze odpowiedniej kopuli.

Oprócz poszukiwania dobrych modeli ilościowych opartych na pojęciu kopuli, warto zauważyć, że wymienione wyżej trudności stosowania kopuli w zagadnieniach finansowych są potencjalnym, dodatkowym obszarem badań naukowych.

Literatura

- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex 2004.
- Dziekoński P. *Nowa Bazylejska Umowa Kapitałowa – konsekwencje dla rynku kredytowego*, w: *Materiały i Studia* [online], nr 164, Narodowy Bank Polski, Warszawa 2003, dostęp: 14 listopada 2010, dostępny w Internecie: www.nbp.pl/publikacje/materiały_i_studia/ms164.pdf.
- Gątarek, D., *Obecny kryzys nazwę kryzysem zaufania*, w: obserwatorfinansowy.pl [online], Warszawa: 2010, dostęp: 14 listopada 2010, dostępny w Internecie: <http://www.obserwatorfinansowy.pl/2010/01/25/obecny-kryzys-nazwe-kryzysem-zaufania/#L>.
- Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2007.

- Kawulski A., *Nowelizacja ustawy Prawo bankowe w zakresie przepisów dotyczących nadzoru bankowego – wybrane zagadnienia*, w: *Nowe regulacje bankowe* [online], Narodowy Bank Polski, Warszawa 2004, dostęp: 14 listopada 2010, dostępny w Internecie: www.nbp.pl.
- Krasodomska J., *Nowa Bazylejska Umowa Kapitałowa jako czynnik ograniczania ryzyka Bankowego*, *Zeszyty Naukowe* [online], nr 674, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 2005 [dostęp: 14 listopada 2010], dostępny w Internecie: http://gollum.uek.krakow.pl/bibl_ae_zasoby/zeszyty/pdf/99392857.pdf.
- Papla D., Piontek K., *Zastosowanie rozkładów α -stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, w: *Wyzwania współczesnych finansów*, red. Jajuga K., Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wrocław 2009 [dostęp: 14 listopada 2010], dostępny w Internecie: http://www.kpiontek.ae.wroc.pl/DP_KP_VaR_copula.pdf.
- Romano C., *Applying Copula Function To Risk Management* [online], Washington DC, Gravitas Capital, dostępny w Internecie: <http://www.gravitascapital.com/Research/Risk/Applying%20Copula%20Function%20to%20Risk%20Management.pdf>.
- Sławiński A., *Przyczyny i konsekwencje kryzysu na rynku papierów wartościowych emitowanych przez fundusze sekurytyzacyjne* [online], Zakład Rynku Papierów Skarbowych Katedry Skarbowości Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa 2007, dostępny w Internecie: http://www.rynkifinansowe.pl/subprime_CDO.pdf.
- Sterzyński M., *Zarys zmian w nadzorze na jednolitym rynku ubezpieczeń w kontekście projektu Solvency II*, w: *Forum dyskusyjne ubezpieczeń i funduszy emerytalnych* [online], 2/2004, KNUiFE, Warszawa 2004, dostępny w Internecie: http://www.knf.gov.pl/Images/Sterzynski-Forum_dyskusyjne_tcm20-5401_tcm75-18530.pdf.
- Stryjek A., *Zastosowanie miar zależności zmiennych losowych oraz kopuli Claytona i Gumbel-Hougaard do szacowania wartości zagrożonej*, „Przegląd Statystyczny” 2009, 3-4, s. 67-80.
- Zarządzanie ryzykiem*, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.