# 4

# Wykorzystanie metody ARIMA w prognozowaniu indeksów giełdowych

*Krzysztof Ziółkowski**

Przewidywanie przyszłości ma ogromne znaczenie w gospodarce, zwłaszcza jeśli mówimy o zarządzaniu procesami. Ceny akcji, kurs walutowy, dynamika PKB, poziom inflacji to tylko niektóre ze zmiennych, które wpływają na podejmowane decyzje ekonomiczne. Umiejętność prognozowania ww. wartości, tj. odgadywania przyszłych kierunków zmian – np. cen akcji może stanowić, dla uczestników życia gospodarczego, istotne źródło przewagi konkurencyjnej, a tym samym pomóc im się utrzymać na rynku.

Indeks giełdowy jest miarą wartości wyselekcjonowanych spółek giełdowych w określonym czasie. Jest on obliczany na podstawie cen wybranych akcji (zazwyczaj średnia ważona). Jest to narzędzie wykorzystywane przez inwestorów i menedżerów finansowych do opisywania rynku oraz porównania stopy zwrotu z poszczególnych inwestycji.

Indeksy są matematyczną konstrukcją, więc nie można w nie inwestować bezpośrednio. Jednak wiele funduszy inwestycyjnych i funduszy giełdowych pozwala na tego typu grę.

W niniejszym artykule zostanie zaprezentowana jedna z metod prognozowania indeksów giełdowych. Predykcji dokonano na podstawie danych statystycznych dla indeksów DAX, FTSE 100, S&P 500 i WIG20 za lata 2006-2016 w ujęciu kwartalnym, natomiast prognoza została sporządzona przy pomocy modelu ARIMA na kolejne kwartały.

---

* Dr Krzysztof Ziółkowski – Wyższa Szkoła Bankowa w Gdańsku, Bałtycki Ośrodek Logistyki Stosowanej

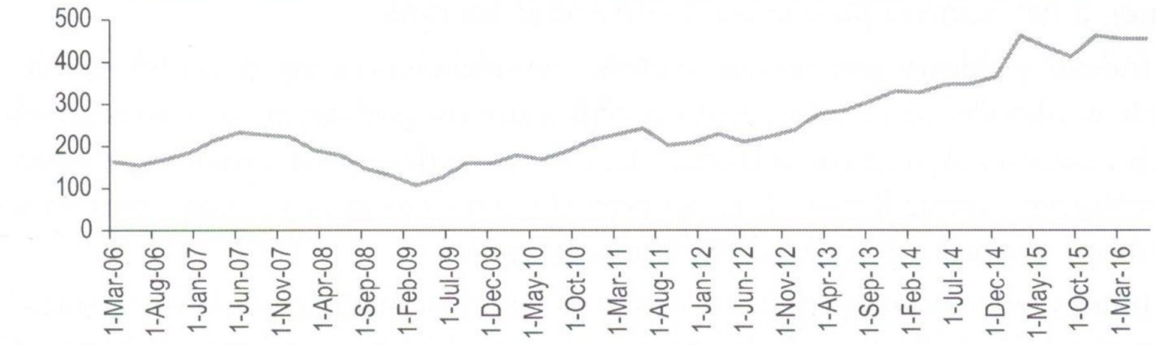
## 4.1. Charakterystyka omawianych indeksów

Podstawowe decyzje dotyczące inwestowania na danym rynku uczestnicy podejmują na podstawie indeksów giełdowych, są one lustrzanym odbiciem trendów inwestycyjnych jakie dokonują się na konkretnej giełdzie. Ponadto indeksy globalne, czy też przez innych autorów nazywane światowymi są równocześnie odzwierciedleniem koniunktury gospodarczej oraz światowych trendów inwestycyjnych.

W niniejszym artykule poddano prognozie trzy indeksy światowe DAX, FTSE 100, S&P 500 oraz jeden lokalny WIG20 – ewentualnie można go określić regionalnym.

DAX (skrót od Deutscher Aktienindex) to najważniejszy niemiecki indeks giełdowy. Odzwierciedla on wydajność 30 największych i najbardziej aktywnym w obrocie firm (pod względem kapitalizacji rynkowej i wolumenu transakcji), które są notowane na giełdzie we Frankfurcie w standardzie „Prime" (segment rynku regulowanego z dodatkowymi obowiązkami, m.in. dot. przejrzystości transakcji). Od 21 czerwca 1999 roku wartość indeksu ustala się wyłącznie na podstawie cen Xetra (elektronicznego handlu papierami wartościowymi) [http://www.dax-indices.com/]. Liczy się go od godziny 9.00 do 17.30, a jego wartość obliczana jest co sekundę (zob. wykres 4.1).

**Wykres 4.1. Notowanie indeksu DAX w latach 2006-2016**




Źródło: opracowanie własne.

Na początku indeks DAX miał być uzupełnieniem innych niemieckich indeksów giełdowych, jednakże z czasem zyskał na znaczeniu i stał się głównym indeksem na niemieckiej giełdzie o wymiarze krajowym, ale też i międzynarodowym.

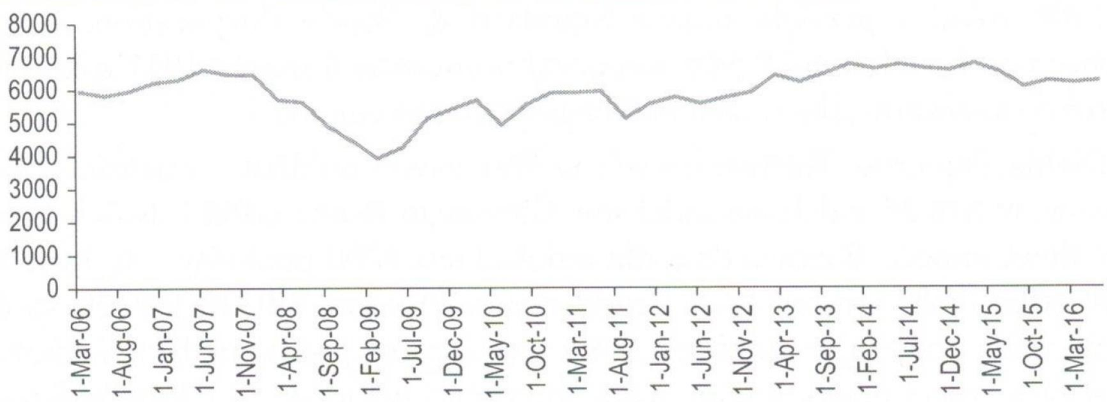
DAX został opracowany wspólnie przez niemiecką Giełdę Papierów Wartościowych, giełdę we Frankfurcie i niemieckie czasopismo giełdowe (Börsen-Zeitung). Indeks ów zadebiutował dnia 1 lipca 1988 roku i nawiązuje do indeksu„Börsen-Zeitung", którego historia sięga roku 1959.

DAX pokazuje zmianę wartości akcji 30 największych spółek akcyjnych pod względem kapitalizacji oraz obrotu. Każdej spółce przyznana jest odpowiednia waga, która odzwierciedla jej wielkość. Przy konstrukcji indeksu bierze się pod uwagę jedynie akcje podlegające obrotowi na giełdzie (*Free float*). DAX jest zastrzeżonym znakiem towarowym niemieckiej giełdy [Hampel, 2013].

Kolejnym prognozowanym indeksem jest Financial Times Stock Exchange Index, zwany także indeksem FTSE 100, lub nieformalnie, „footsie". Footsie jest indeksem akcji 100 spółek notowanych na giełdzie w Londynie o najwyższej kapitalizacji. Jest postrzegany jako miernik dobrobytu dla przedsiębiorstw regulowanych przez brytyjskie prawo spółek handlowych. Indeks jest utrzymywany przez FTSE Group, spółkę zależną od giełdy w Londynie.

Indeks rozpoczął swe notowania 3 stycznia 1984 roku na poziomie bazowym 1000. Natomiast najwyższą wartość zamknięcia osiągnął na poziomie 7103,98 punktów 27 kwietnia 2015 roku (zob. wykres 4.2).

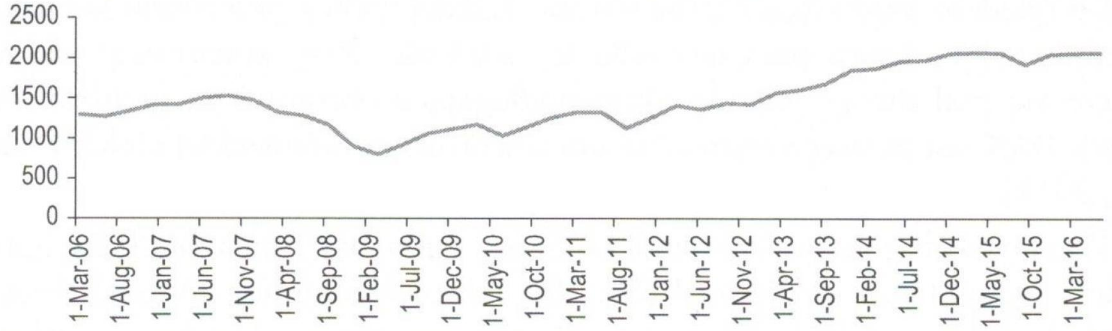
Wykres 4.2. Notowanie indeksu FTSE 100 w latach 2006-2016




Źródło: opracowanie własne.

Standard & Poor's 500, często nazywany S&P 500, lub po prostu S&P, to amerykański indeks giełdowy na podstawie kapitalizacji rynkowej 500 największych firm posiadających akcje zwykłe notowane na amerykańskich giełdach NYSE i NASDAQ. Wagi, a także komponenty indeksu S&P 500 są określane przez indeks S&P Dow Jones. S&P różni się od innych amerykańskich indeksów giełdowych, takich jak Dow Jones Industrial Average czy Nasdaq Composite, z powodu swojej różnorodności i metodologii. Jest on jednym z najczęściej obserwowanych wskaźników kapitałowych, a wielu uważa go za jeden z najlepszych wskaźników amerykańskiej giełdy (zob. wykres 4.3).

**Wykres 4.3. Notowanie indeksu S&P 500 w latach 2006-2016**

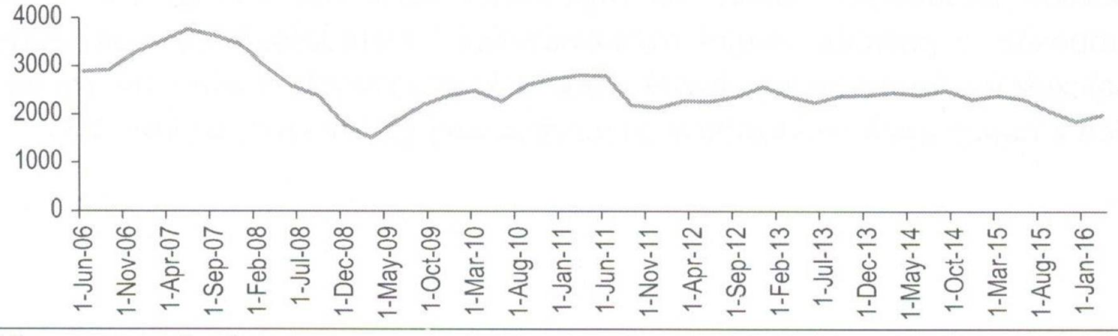



Źródło: opracowanie własne.

Indeks S&P 500 po raz pierwszy został wprowadzony na rynek giełdowy w 1923 roku i składała się na niego niewielka liczba akcji. 3 lata później, w 1926 roku indeks rozszerzono do 90 akcji, a następnie w 1957 roku poszerzona do stanu obecnego. Natomiast firma Standard & Poor's, która dostarcza informacje finansowe i analizy, została założona w 1860 roku przez Henry'ego Varnuma Poora. W 1941 roku Poor Publishing (oryginalna nazwa firmy Henry'ego Varnuma Poora) połączyła się ze Standard Statistics (założona w 1906 roku) i przyjęła nazwę Standard & Poor's Corporation. Indeks w obecnym kształcie S&P 500 rozpoczął notowania 4 marca 1957 roku i jest szeroko stosowany jako miara ogólnego poziomu cen akcji.

Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie publikuje wartości 29 indeksów, w tym 25 indeksów indeksów Głównego Rynku GPW i dwóch indeksów NewConnect. Bazową datą dla indeksu jest 1000 punktów – 16 kwietnia 1994 roku (zob. wykres 4.4). Uczestnikami indeksu WIG20 jest 20 spółek z najwyższą pozycją w rankingu, który wyznaczany jest na podstawie danych po sesji w trzeci piątek lutego, maja, sierpnia i listopada. Ranking obliczany jest na podstawie obrotów za ostatnie 12 miesięcy oraz wartości akcji w wolnym obrocie wyznaczonej w oparciu o losowo wybrany kurs zamknięcia z przeciągu ostatnich 5 dni sesyjnych licząc wstecz od dnia rankingu. W rankingu nie uczestniczą najmniejsze spółki z ostatniego kwartyla kapitalizacji w wolnym obrocie [GPW, 2016].

**Wykres 4.4. Notowanie indeksu WIG 20 w latach 2006-2016**




Źródło: opracowanie własne.

## 4.2. Ramy teoretyczne

W literaturze można znaleźć wiele rozwiązań, które wykorzystuje się przy prognozowaniu niestacjonarnych szeregów czasowych. Najczęściej niestacjonarność jest względem średniej, rzadziej względem wariancji. Jednym z podejść, które służy do prognozowania ww. procesów jest jednokrotne zróżnicowanie $y_t$, które jest zwane procesem zintegrowanym rzędu pierwszego (ARIMA). W niniejszej pracy wykorzystano model ARIMA. Alternatywnym podejściem, które stosuje się przy prognozowaniu szeregów czasowych jest wielowymiarowa analiza. Model wielowymiarowy może składać się z pojedynczych modeli równań egzogenicznych zmiennych objaśniających lub alternatywnie może zawierać układy równań strukturalnych lub niestrukturalnych [Meyler, Kenny, Quinn, 1998, s. 3-4].

Modelowanie przy pomocy metody ARIMA, które służy do prognozowania szeregów czasowych jest zasadniczo wykorzystywane „bez wiedzy", tj. w przeciwieństwie do innych metod, które łączą z sobą bazowy model gospodarczy lub są zbiorem relacji strukturalnych. W modelu ARIMA przyjmuje się, że poprzednie wartości serii wraz z uwzględnieniem błędów zawierają informacje wystarczające dla celów prognozowania.

Najważniejszą zaletą tego rodzaju modelu jest to, że wymaga danych na temat jednego szeregu czasowego. Ta cecha jest korzystna, gdy prognozuje się długie szeregi czasowe. Inną zaletą jest to, że ARIMA pozwala uniknąć problemu, który występuje często w modelach wielowymiarowych.

Istnieją również pewne wady modelu ARIMA. Po pierwsze, niektóre z tradycyjnych technik identyfikacji modelu są bardzo subiektywne i niezawodność wybranego modelu może zależeć od umiejętności i doświadczenia ekonometryka (ale z drugiej strony, takie uwagi krytyczne często stosuje się do innych metod modelowania). Drugą wadą jest to, że powyższy model nie jest osadzony w jakichkolwiek relacjach strukturalnych czy też nie jest powiązany/oparty na innych modelach teoretycznych, w związku z tym znaczenie gospodarcze wybranego modelu nie jest do końca jasne. Ponadto nie jest możliwe uruchomienie symulacji gospodarczych przy wykorzystaniu modeli ARIMA w przeciwieństwie do modeli strukturalnych. Budowa takich modeli oparta jest na zasadzie „do tyłu patrząc". Są one na ogół słabe w przewidywaniu punktów zwrotnych, chyba że punkt zwrotny stanowi powrót do równowagi w długim okresie.

Podejście Boxa-Jenkinsa jest jedną z najbardziej popularnych metod budowy szeregów czasowych i jest wykorzystywane przy konstrukcji modeli ARIMA [Box, Jenkins 1976; Geunts, Ibrahim, 1975, s. 182-188].

Model ARIMA jest połączeniem składowych *AR* i *MA*. Proces opisany poniższym równaniem zwany jest procesem autoregresyjnym rzędu *p* *AR*(*p*). Określa on, że bieżąca wartość szeregu równa się poprzedniej razy parametr $\varphi$ plus zaburzenie:

$$\mathrm{Y_t} = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t. \tag{1}$$

W przeciwieństwie do modeli *AR*, średnia ruchoma (*MA*) jest powszechnym sposobem modelowania szeregów czasowych. Równanie dla średniej ruchomej *MA* (*q*) rzędu *q* można przedstawić w następujący sposób:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \tag{2}$$

gdzie $\mu$ jest średnią, $\theta_1$, ..., $\theta_q$ są parametrami modelu, a $\varepsilon_t$, $\varepsilon_{t-1}$, składnikiem losowym. Wartość *q* jest rzędem średniej ruchomej *MA* (*q*).

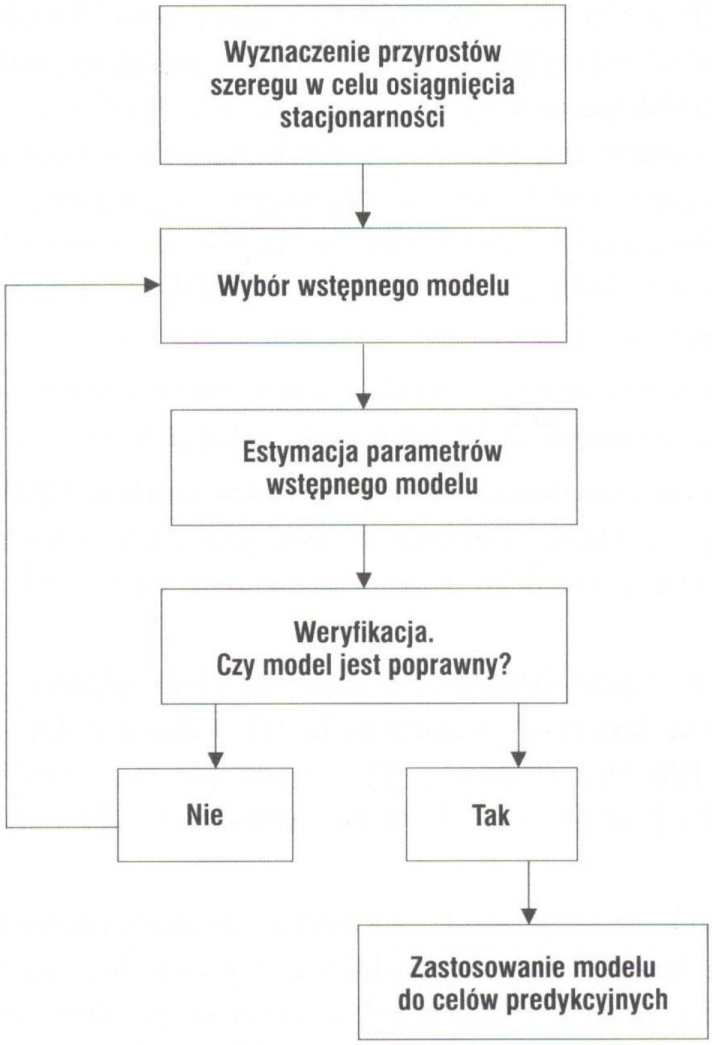
Procesy autoregresyjne rzędu *p* -*AR*(*p*), procesy średniej ruchomej rzędu *q* – *MA*(*q*), zintegrowane rzędu *d* procesy autoregresyjne rzędu *p* ze średnią ruchomą rzędu *q* – *ARIMA*(*p,d,q*) można przedstawić w następujący sposób:

$$Y_t = c + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \ldots + \theta_p Y_{t-p} + \mu_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + + \varphi_2 q Y_{t-q} \tag{3}$$

Podstawowe etapy podejścia Boxa-Jenkinsa są następujące: (1) wyznaczenie przyrostów wyjściowego szeregu w celu uzyskania szeregu stacjonarnego, (2) specyfikacja wstępnego modelu, (3) estymacja modelu, (4) weryfikacja, (5) zastosowanie modelu do celów predykcyjnych (zob. rysunek 4.1) [Maddala, 1992, s. 544].

W praktyce, aby szeregi czasowe były stacjonarne należy wykonać następujące czynności: usunąć trend, sezonowości i mieć stałą wariancję. Innymi słowy, proces jest stacjonarny, jeśli jego średnia i wariancja są stałe, zaś kowariancja zależy tylko od opóźnienia występującego miedzy dwoma okresami i nie zależy od konkretnego okresu, począwszy od którego kowariancja ta jest liczona. Istotnym elementem identyfikacji jest analiza funkcji autokorelacji i cząstkowej autokorelacji (ACF i PACF). Omawiane testy są dobrym narzędziem do określania, czy dana seria jest stacjonarna czy też nie. Oprócz tego jest również możliwe korzystanie z graficznej interpretacji funkcji autokorelacji (ACF i PACF). Jeśli ACF i PACF oscylują w pobliżu zera, oznacza to, że szereg czasowy jest stacjonarny. Jeśli ACF and PACF nie oscylują wokół zera mamy do czynienia z szeregiem niestacjonarnym [Talal, Bashier, 2007, s. 3].

Rysunek 4.1. Postępowanie Boxa-Jenkinsa dla modeli ARIMA




Źródło: opracowanie na podstawie: [Maddala, 1992, s. 543].

## 4.3. Analiza empiryczna

Dla celów predykcyjnych omawianych indeksów wykorzystano dane za lata 2006-2016, które składają się z kwartalnych obserwacji i są wykorzystane do modelu ARIMA (p, d, q).

Analiza korelogramu (zob. załącznik 1) pokazuje, żeindeksy DAX, FTSE 100, S&P 500 i WIG20 nie są stacjonarne. Wartość *d* przyjmuje wartość 1 dla indeksów DAX, FTSE 100, S&P 500 natomiast dla indeksu WIG 20 wartośćdwynosi 2. Na wykresie widać, że tylko pierwsza wartość jest poza ciągłą linią (DAX, FTSE 100, S&P 500). Również te same wyniki można uzyskać przy użyciu testu ADF – Augmented Dickeya-Fullera [Dickey, Fuller, 1979, s. 427-434], który jest jednym z najbardziej popularnych badań w celu stwierdzenia właściwości szeregu czasowego.

Wygodnym postępowaniem w modelu ARIMA jest estymacja modeli przeidentyfikowanych. Liczy się więc kolejno modele powiększając lub pomniejszając za każdym razem tylko jeden parametr o jedną jednostkę. W praktyce w modelach ARIMA parametry *p* oraz *q* bardzo rzadko przekraczają 2, co istotnie ułatwia omawianą procedurę estymacji. Po wstępnej transformacji danych zapewniającej stacjonarność przystępuje się do oszacowania modelu ARIMA (p, q). Ostatecznie otrzymuje się następujące modele: DAX ARIMA (1,1,1); FTSE 100 ARIMA (2,1,2); S&P 500 ARIMA (3,1,3) i WIG20 ARIMA (1,2,1) (zob. załącznik 2).

Na podstawie oszacowanych modeli dokonano prognozy indeksów na kolejne kwartały, tj. do końca 2016 roku (zob. załącznik 3).

Otrzymana prognoza indeksów przy pomocy modelu ARIMA wskazuje na trend wzrostowy, jednakże przedział ufności jest duży, w związku z tym przy wystąpieniu innych czynników (np. szoków zewnętrznych) ów trend może ulec zmianie.

Prognozowany indeks DAX przy pomocy modelu ARIMA przyjmuje następujące wartości w kolejnych kwartałach: (II – 465,63; III – 470, 44; IV – 479,61); FTSE 100 (II– 6306,65; III – 6136,40; IV – 6073,94); S&P 500 (II – 2120,21; III – 2101,37; IV – 2109,14); WIG20 (II – 2030,02; III – 2021,26; IV – 1996,52).

Ten artykuł wykorzystuje model ARIMA do prognozowania indeksów. Modele ARIMA są teoretycznie uzasadnione i mogą być zaskakująco dobre w prognozowaniu szeregów czasowychw stosunku do alternatywnych podejść modelowania (np. modeli wielowymiarowych) [Meyler, Kenny, Quinn, 1998, s. 3-8].

* * *

Geneza modeli autoregresywnych, a także średniej ruchomej (AR, MA, ARIMA) sięga metod stosowanych przez inżynierów. Modele ARMA należą do jednych z najbardziej efektywnych metod prognozowania szeregów czasowych. Klasyczne modele ARIMA miały zastosowanie do szeregów stacjonarnych. Modele ARIMA można już stosować do procesów niestacjonarnych, jednakże nie do wszystkich. Stosuje się je wyłącznie do takich procesów, które dają się sprowadzić do postaci stacjonarnej. Klasyczna procedura doboru odpowiedniego modelu ARIMA obejmuje następujące etapy: gromadzenie i analiza danych, ustalenie kolejności integracji, identyfikacji i diagnozy.

Ten artykuł opisuje wykorzystanie metody ARIMA w prognozowaniu indeksów giełdowych. Omawiany model jest teoretycznie uzasadniony i może być zaskakująco dobrą alternatywą w stosunku do innych metod (np.wielowymiarowych) modelowania.

Wykorzystując modele ARIMA do prognozowania szeregów czasowych, można spotkać się z wieloma problemami m.in. dotyczącymi określenia rzędu różnicowania, ale też wyboru odpowiedniego rodzaju modelu. Opracowanie modeli ARIMA jest dość pracochłonne i wymaga specjalistycznej wiedzy statystyczno-matematycznej. Zastosowanie ww. modelu nie gwarantuje w każdym przypadku lepszych wyników w porównaniu z wynikami otrzymanymi innymi prostszymi metodami [Chrabołowska, Nazarko, 2003, s. 231], jednakże w prognozowaniu indeksów giełdowych ta metoda jest uzasadniona. Ponadto modele ARIMA mają istotną przewagę nad innymi modelami, ponieważ wskazują na wewnętrzną strukturę szeregu i objaśniają mechanizm jego generowania.

## Streszczenie

W niniejszym artykule została zaprezentowana jedna z metod prognozowania indeksów giełdowych. Predykcji dokonano na podstawie danych statystycznych dla indeksów DAX, FTSE 100, S&P 500 i WIG20 za lata 2006-2016 w ujęciu kwartalnym, natomiast prognoza została sporządzona przy pomocy modelu ARIMA na kolejne kwartały.

Wykorzystując modele ARIMA do prognozowania szeregów czasowych, można spotkać się z wieloma problemami m.in. dotyczącymi określenia rzędu różnicowania, ale też wyboru odpowiedniego rodzaju modelu. Jednak istotną zaletą metody ARIMA jest, iż wskazują na wewnętrzną strukturę szeregu i objaśniają mechanizm jego generowania. Omawiany model jest teoretycznie uzasadniony i może być zaskakująco dobrą alternatywą w stosunku do innych metod (np.wielowymiarowych) modelowania.

## Summary

### Forecastingstock Indices Using Arima Method

In this paper was presented one of the methods of forecasting indices. Prediction was made on the basis of statistical data for the indices DAX, FTSE 100, S&P 500 and the WIG20 for the years 2006 to 2016 on a quarterly basis, while the forecast was prepared using the ARIMA model for the next quarters.

Using the ARIMA models for forecasting timeseries data can meet a variety of problems, such as the determination of the order of differentiation, but also the selection of an appropriate model. However, a major advantage of the method ARIMA is that indicates the internal structure of the time series and explains the mechanism of its generating. The presented model is theoretically justified and can be surprisingly good alternative to other methods (for example multi-dimensional) modelling.

## Bibliografia

Bashier A., Talal B. (2007), *Forecasting Foreign Direct Investment Inflow in Jordan: Univariate ARIMA Mode,* Journal of Social Sciences 3 (1).

Box G.E.P., Jenkins G.M. (1976), *Time Series Analysis, Forecasting and Control.* rev. ed. San Francisco: Holden-Day.

Chrabołowska J., Nazarko J. (2003), *Zastosowanie modeli ARIMA w prognozowaniu przychodów ze sprzedaży na przykładzie przedsiębiorstwa handlowego typu CASH & CARRY,* Prace naaukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Nr 998.

Dhalla N.K., Yuspeh S. (1976), *Forget the product life cycle concept!* Harvard Business Review, vol. 54, Issue 1.

Dickey D., Fuller W. (1981), *Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit roo,* Econometrica, No 49.

Dunning J. H. (1981), *Explaining the international direct investment position of countries. Towards a dynamic Or development approach,* WeltwirtschaftlichesArchiv, No. 119.

Geunts M., Ibrahim I. (1975), *Comparing the Box-Jenkins approach with the exponentially smoothed forecasting model approach to Hawaii tourists,* J. Market. Res.

Hindle T. (1984), *Product life cycle,* [w:] *Guide to Management Ideas & Gurus.*

Hampel T. (2013), *Die Kurvenfunktion,* "Der Tagesspiegel".

Maddala G.S. (1992), *Introduction to econometrics,* Macmillian Publishing Company, New York.

Meyler A., Kenny G., Quinn T. (1998), *Forecasting Irish Inflation using ARIMA models. Economic Analysis,* CentarlBak of Irealnd, Irleand.

www.gpw.pl/indeksy, dostęp (22.04.16).

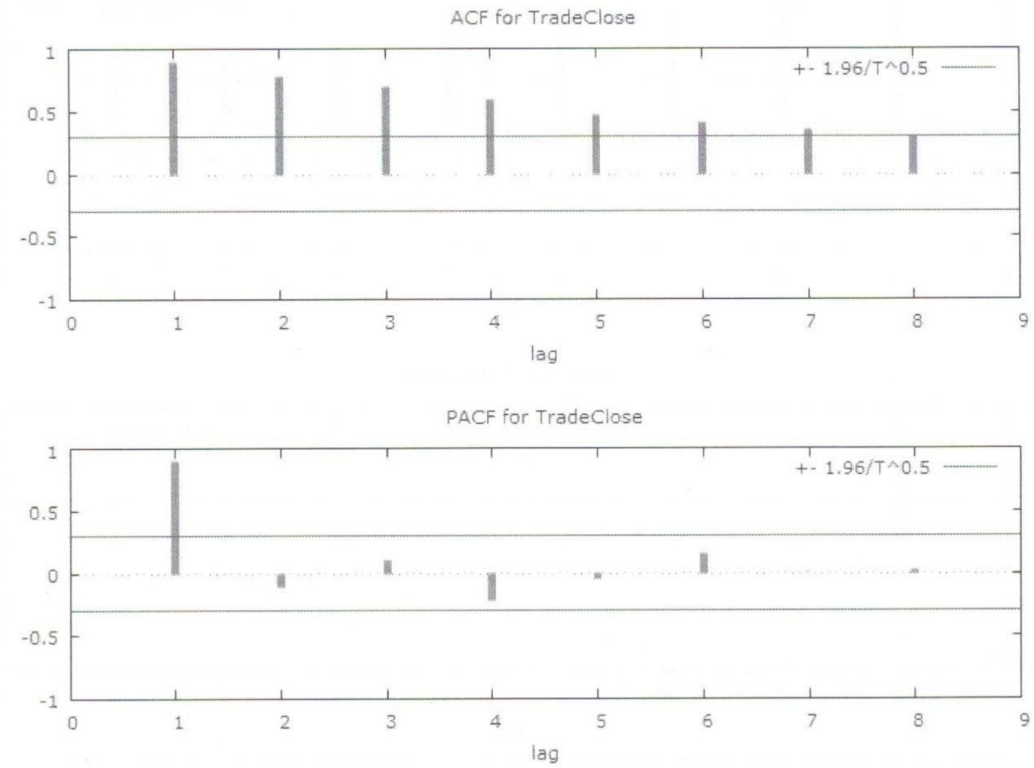
http://www.dax-indices.com, dostęp (21.04.16).

http://www.ftserussell.com/, dostęp (22.04.16).

http://us.spindices.com/indices/equity/sp-500, dostęp (27.04.16).

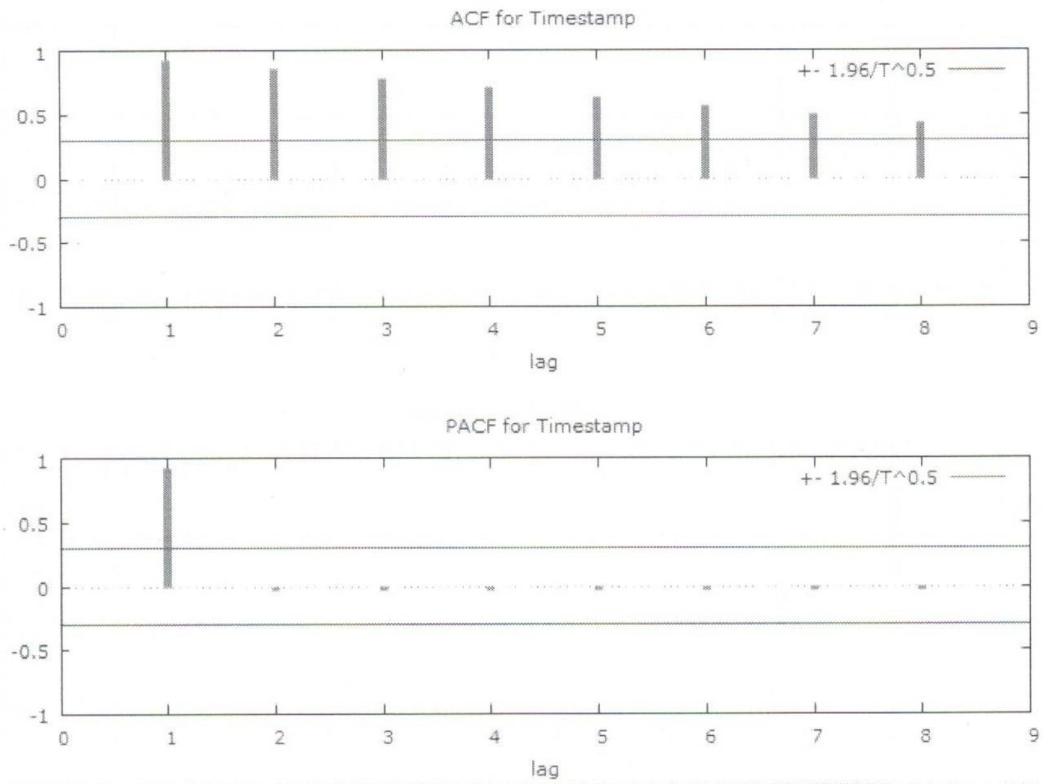
# Załącznik 1

## Funkcja autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) dla indeksu DAX



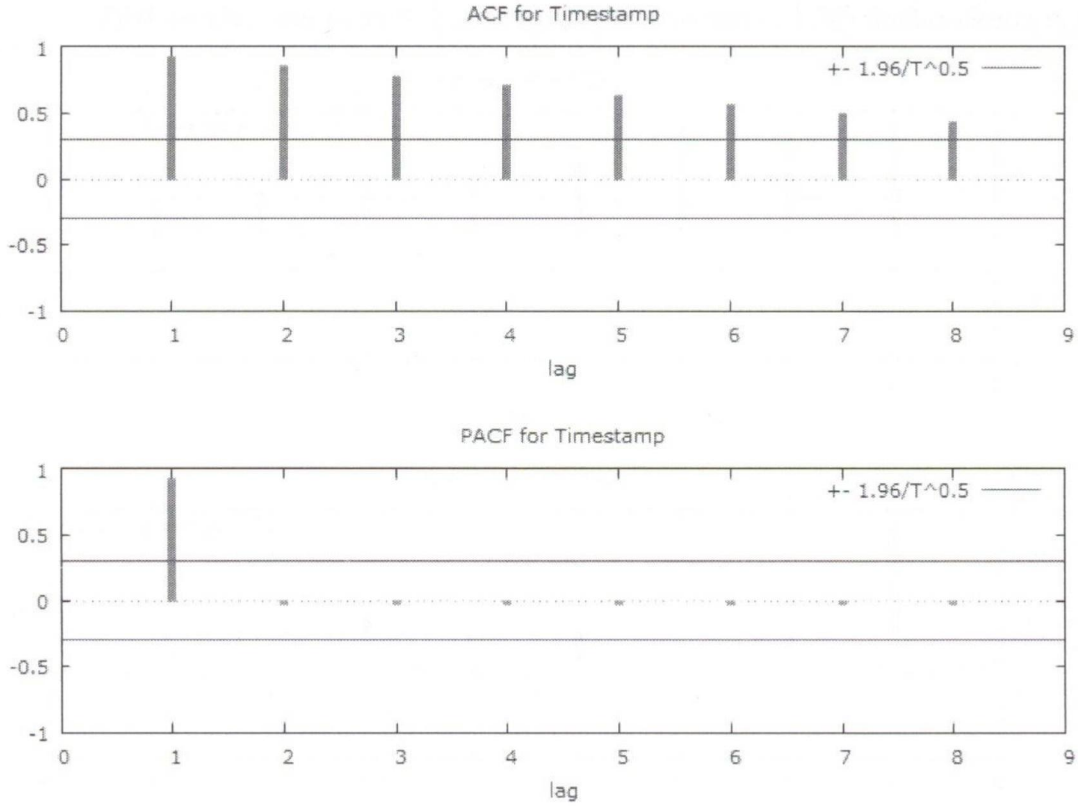

Źródło: obliczenia własne.

## Funkcja autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) dla indeksu FTSE 100



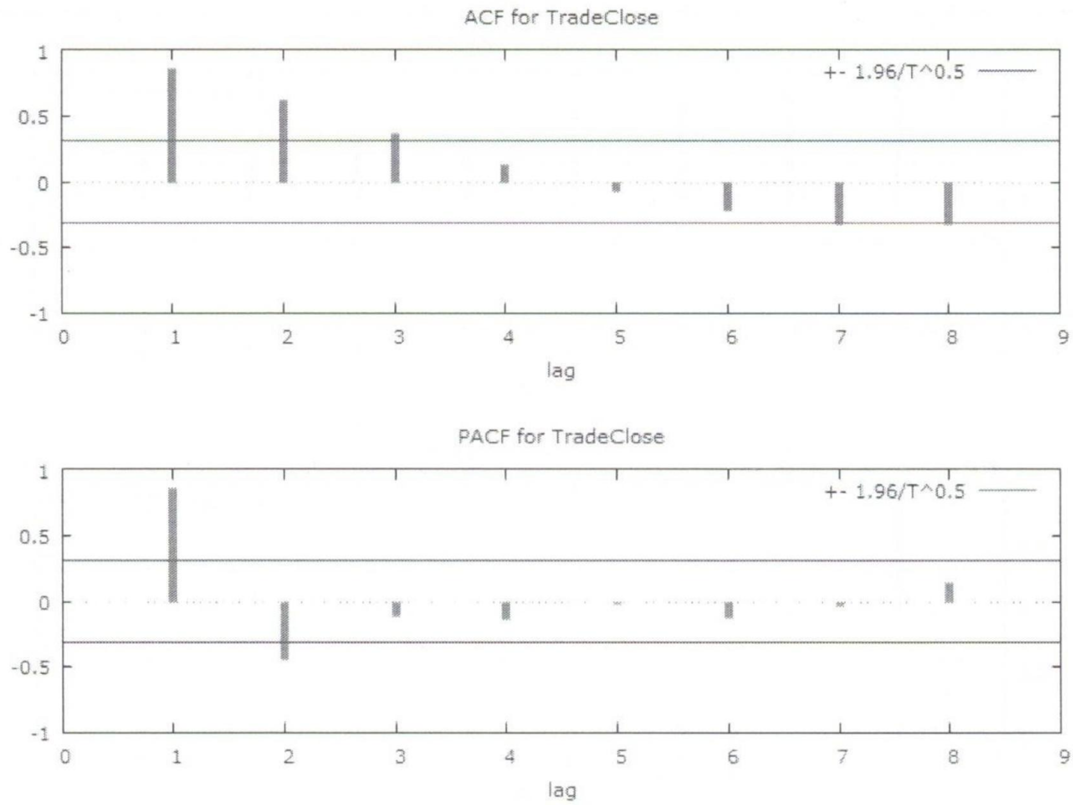

Źródło: obliczenia własne.

**Funkcja autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) dla indeksu S&P 500**




Źródło: obliczenia własne.

**Funkcja autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) dla indeksu WIG20**




Źródło: obliczenia własne.

# Załącznik 2

## Estymacja indeksu DAX – model ARIMA (1,1,1)

ARIMA, using observations 2006:2-2016:1 (T = 40)
Dependent variable: (1-L) TradeClose
Standard errors based on Hessian

| | *Coefficient* | *Std. Error* | *z* | *p-value* | |
|---|---|---|---|---|---|
| const | 7.32819 | 4.25136 | 1.7237 | 0.0848 | * |
| phi_1 | –0.731307 | 0.115882 | –6.3108 | <0.0001 | *** |
| theta_1 | 1 | 0.116282 | 8.5998 | <0.0001 | *** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 7.289250 | S.D. dependent var | 25.51695 |
| Mean of innovations | –0.034798 | S.D. of innovations | 23.31161 |
| Log-likelihood | –183.7032 | Akaike criterion | 375.4064 |
| Schwarz criterion | 382.1619 | Hannan-Quinn | 377.8489 |

| | *Real* | *Imaginary* | *Modulus* | *Frequency* |
|---|---|---|---|---|
| AR | | | | |
| Root 1 | -1.3674 | 0.0000 | 1.3674 | 0.5000 |
| MA | | | | |
| Root 1 | -1.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.5000 |

## Estymacja indeksu FTSE 100 – model ARIMA (2,1,2)

ARIMA, using observations 2006:2-2016:1 (T = 40)
Dependent variable: (1-L) TradeClose
Standard errors based on Hessian

| | *Coefficient* | *Std. Error* | *z* | *p-value* | |
|---|---|---|---|---|---|
| const | 11.1177 | 21.831 | 0.5093 | 0.6106 | |
| phi_1 | 0.78488 | 0.217861 | 3.6027 | 0.0003 | *** |
| phi_2 | –0.709259 | 0.267894 | –2.6475 | 0.0081 | *** |
| phi_3 | 0.579854 | 0.17282 | 3.3552 | 0.0008 | *** |
| theta_1 | –0.774872 | 0.166068 | –4.6660 | <0.0001 | *** |
| theta_2 | 0.77488 | 0.221701 | 3.4952 | 0.0005 | *** |
| theta_3 | –0.999993 | 0.197787 | –5.0559 | <0.0001 | *** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 5.258250 | S.D. dependent var | 385.4239 |
| Mean of innovations | –13.73746 | S.D. of innovations | 324.0284 |
| Log-likelihood | –290.5123 | Akaike criterion | 597.0247 |
| Schwarz criterion | 610.5357 | Hannan-Quinn | 601.9099 |

| | | *Real* | *Imaginary* | *Modulus* | *Frequency* |
|---|---|---|---|---|---|
| AR | | | | | |
| | Root 1 | 1.2469 | 0.0000 | 1.2469 | 0.0000 |
| | Root 2 | -0.0118 | -1.1760 | 1.1761 | -0.2516 |
| | Root 3 | -0.0118 | 1.1760 | 1.1761 | 0.2516 |
| MA | | | | | |
| | Root 1 | 1.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| | Root 2 | -0.1126 | -0.9936 | 1.0000 | -0.2680 |
| | Root 3 | -0.1126 | 0.9936 | 1.0000 | 0.2680 |

**Estymacja indeksu S&P 500 – model ARIMA (3,1,3)**

ARIMA, using observations 2006:2-2016:1 (T = 40)
Dependent variable: (1-L) TradeClose
Standard errors based on Hessian

| | *Coefficient* | *Std. Error* | *z* | *p-value* | |
|---|---|---|---|---|---|
| const | 18.3742 | 17.7021 | 1.0380 | 0.2993 | |
| phi_1 | –0.532402 | 0.152757 | –3.4853 | 0.0005 | *** |
| phi_2 | –0.722586 | 0.146804 | –4.9221 | <0.0001 | *** |
| theta_1 | 0.777398 | 0.09017 | 8.6215 | <0.0001 | *** |
| theta_2 | 1 | 0.110678 | 9.0353 | <0.0001 | *** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 19.12275 | S.D. dependent var | 101.8194 |
| Mean of innovations | 0.585778 | S.D. of innovations | 91.15017 |
| Log-likelihood | –238.8717 | Akaike criterion | 489.7434 |
| Schwarz criterion | 499.8767 | Hannan-Quinn | 493.4073 |

| | | *Real* | *Imaginary* | *Modulus* | *Frequency* |
|---|---|---|---|---|---|
| AR | | | | | |
| | Root 1 | -0.3684 | -1.1172 | 1.1764 | -0.3007 |
| | Root 2 | -0.3684 | 1.1172 | 1.1764 | 0.3007 |
| MA | | | | | |
| | Root 1 | -0.3887 | -0.9214 | 1.0000 | -0.3135 |
| | Root 2 | -0.3887 | 0.9214 | 1.0000 | 0.3135 |

## Estymacja indeksu WIG20 – model ARIMA (1,2,1)

ARIMA, using observations 2006:4-2016:1 (T = 38)
Dependent variable: (1-L)^2 TradeClose
Standard errors based on Hessian

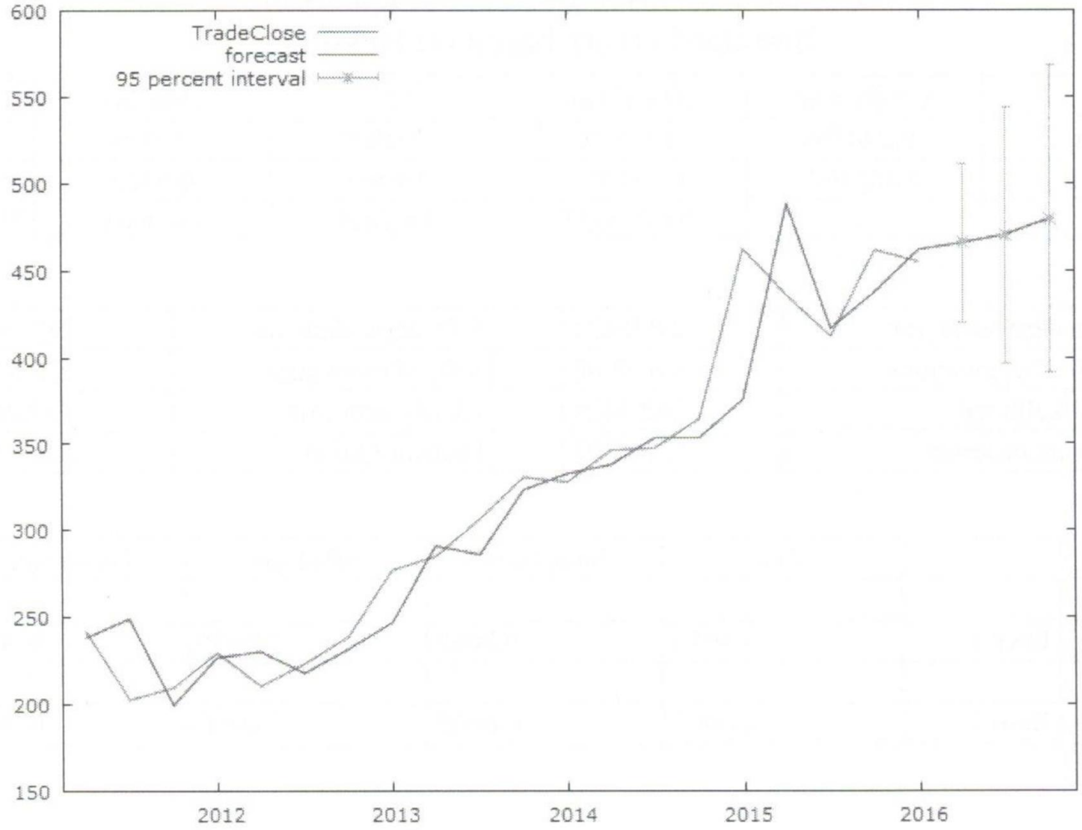
| | *Coefficient* | *Std. Error* | *z* | *p-value* | |
|---|---|---|---|---|---|
| const | −0.244766 | 4.81848 | −0.0508 | 0.9595 | |
| phi_1 | 0.385362 | 0.154334 | 2.4969 | 0.0125 | ** |
| theta_1 | −1 | 0.0703337 | −14.2179 | <0.0001 | *** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mean dependent var | 2.878421 | S.D. dependent var | 282.9466 |
| Mean of innovations | −9.679780 | S.D. of innovations | 230.8184 |
| Log-likelihood | −262.1429 | Akaike criterion | 532.2858 |
| Schwarz criterion | 538.8362 | Hannan-Quinn | 534.6164 |

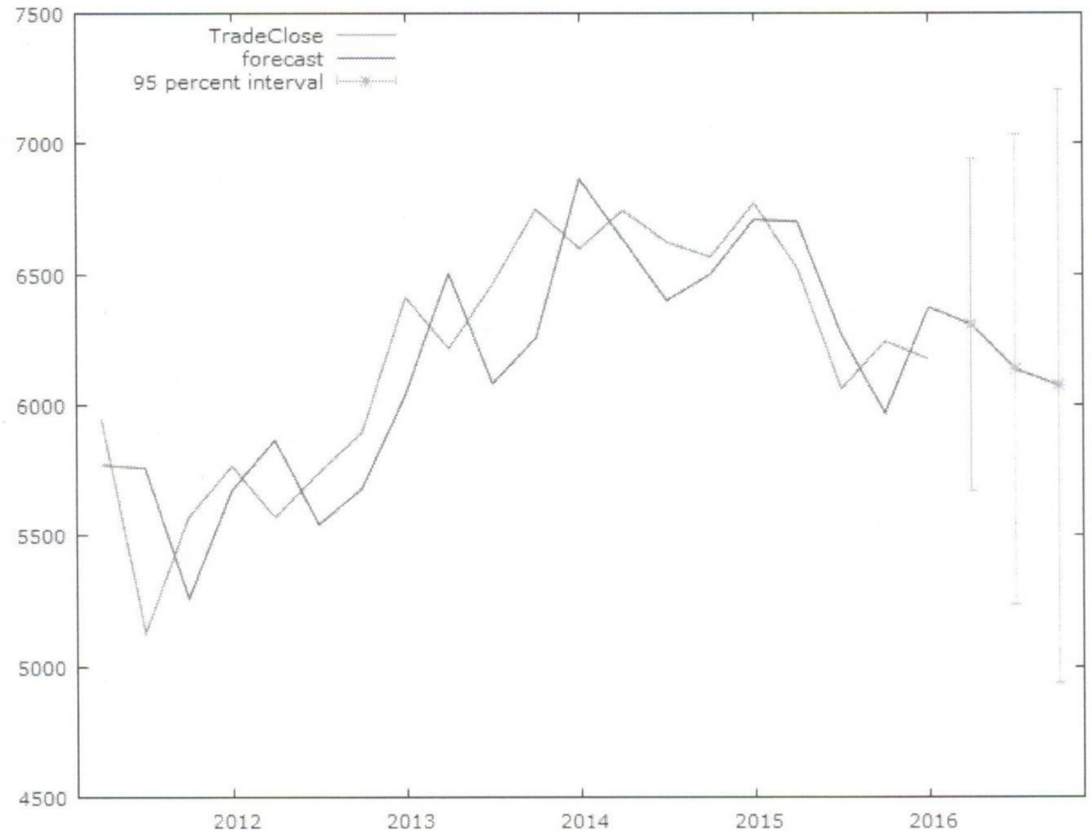
| | | *Real* | *Imaginary* | *Modulus* | *Frequency* |
|---|---|---|---|---|---|
| AR | | | | | |
| | Root 1 | 2.5950 | 0.0000 | 2.5950 | 0.0000 |
| MA | | | | | |
| | Root 1 | 1.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 |

# Załącznik 3

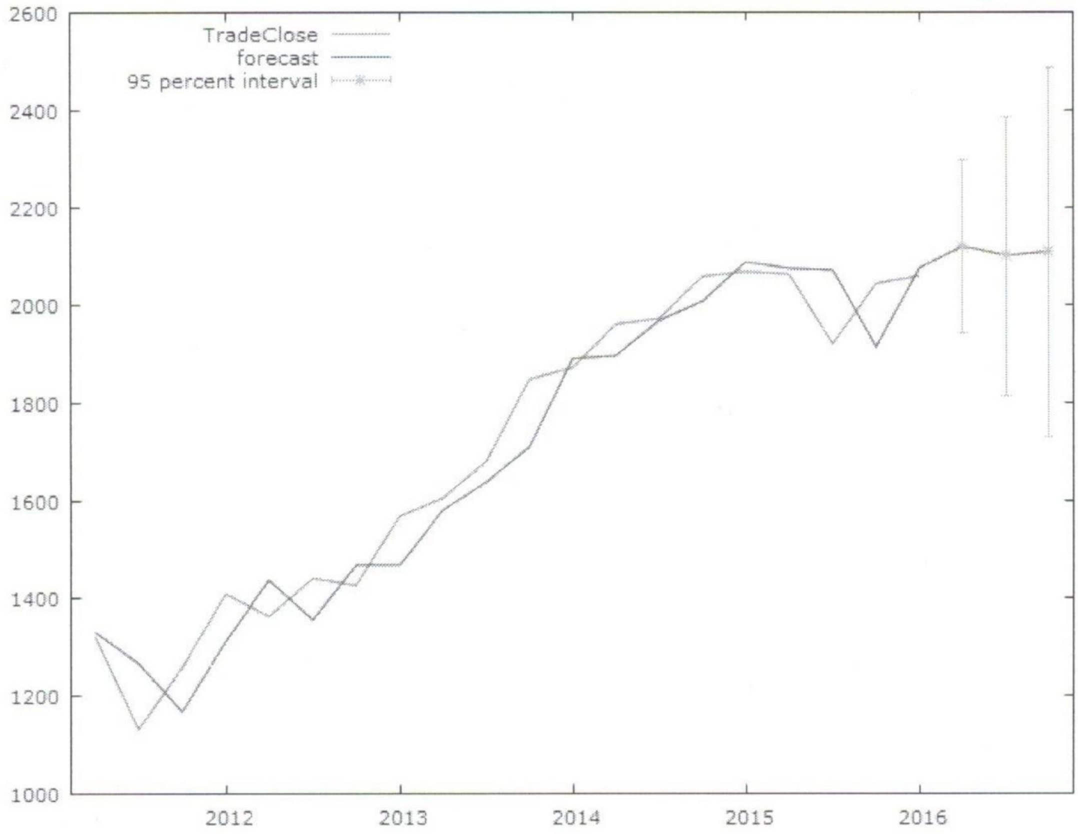
## Prognoza – indeks DAX




## Prognoza – indeks FTSE 100



## Prognoza – indeks S&P 500




## Prognoza – indeks WIG20