Zeszyty Naukowe
Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu
Nr 2(34)/2013

Anna Sroczyńska-Baron

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

Wybór portfela akcji z wykorzystaniem narzędzi teorii gier kooperacyjnych

Streszczenie. Jednym z istotnych problemów podczas gry na giełdzie jest wybór odpowiedniego portfela. Gracz pragnie dużego zysku, ale równocześnie małego ryzyka. Każdy rozsądny gracz ogranicza swój wybór tylko do portfeli należących do efektywnego zbioru. Jednak w tym momencie decyzja o wyborze jednego konkretnego portfela spośród wskazanych jest już indywidualna i zależy od gracza, jego awersji do ryzyka. W artykule tym problem ten został przedstawiony jako gra – wewnętrzny konflikt gracza. Z jednej strony oczekuje on dużego zysku, z drugiej niskiego poziomu ryzyka. Który portfel powinien zostać mu wskazany, aby usatysfakcjonować go zarówno pod względem oczekiwanej wygranej, jak i ryzyka? W celu rozwiązania tak postawionego problemu pewna gra została sformułowana, opisana i rozwiązana z wykorzystaniem modelu Zeuthena i Harsanyiego gier kooperacyjnych.

Słowa kluczowe: wybór portfela, gry kooperacyjne, model Harsanyiego i Zeuthena

Wstęp

Teoria gier jako dziedzina matematyki jest jedną z metod podejmowania decyzji w świecie ekonomii w warunkach strategicznej niepewności co do działań, które podejmują inne podmioty. Wydaje się więc odpowiednim narzędziem do wykorzystania podczas gry na giełdzie. W pracy tej elementy teorii gier wykorzystane zostaną do wyboru portfela akcji przez gracza giełdowego.

Podczas gry na giełdzie gracz staje przed problemem wyboru odpowiedniego dla siebie portfela. Znając oczekiwane zyski wraz z poziomem ryzyka dla poszczególnych portfeli musi on podjąć decyzję o wyborze konkretnego portfela najkorzystniejszego dla niego. Z jednej strony pragnie on oczywiście uzyskać jak największy zysk, z drugiej jednak pragnie minimalizować ryzyko. Problem leży więc w wyborze takiego portfela, który usatysfakcjonowałby gracza zarówno pod względem oczekiwanej wygranej, jak i ryzyka. W pracy tej rozwiązanie tak postawionego problemu znalezione zostało na bazie teorii gier. Poszukiwanie odpowiedniego portfela potraktowano jako pewną grę dwuosobową i rozwiązano ją wykorzystując narzędzia gier kooperacyjnych.

Celem pracy jest przedstawienie możliwości wykorzystania teorii gier do konstrukcji portfela. Sposób postępowania gracza giełdowego przeanalizowany zostanie na podstawie danych pochodzących z GPW w Warszawie.

1. Model Markowitza

W modelu Markowitza jako miara dochodu wykorzystywana jest oczekiwana stopa zwrotu, a jako miara ryzyka odchylenie standardowe stóp zwrotu. Wykorzystując dane historyczne, wartość oczekiwaną stopy zwrotu dla *i*-tej akcji wyznacza się ze wzoru[1]:

$$Er_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} r_{ik}}{n}, \tag{1}$$

gdzie: r_{ik} – stopa zwrotu *i*-tej akcji zrealizowana w *k*-tym okresie, *n* – liczba okresów, z jakich pochodzą dane. Odchylenie standardowe stopy zwrotu dla *i*-tej akcji można obliczyć wykorzystując wzór:

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (r_{ik} - Er_i)^2}{n}}. \tag{2}$$

Znając rozkłady stóp zwrotu i odchylenia standardowe akcji wchodzących w skład portfela, można określić, ile wynosi oczekiwana stopa zwrotu z portfela i jakie jest jego ryzyko. Przez oczekiwaną stopę zwrotu z portfela określa się średnią ważoną oczekiwanych stóp zwrotu akcji wchodzących w skład portfela, przy

[1] R. Haugen, *Modern Investment Theory*, Prentice Hall Inc., New Jersey 1993.

czym wagami są ich udziały w portfelu. Opisaną zależność dla portfela zbudowanego z m akcji przedstawia wzór:

$$r_p = \sum_{i=1}^{m} x_i E r_i \,, \tag{3}$$

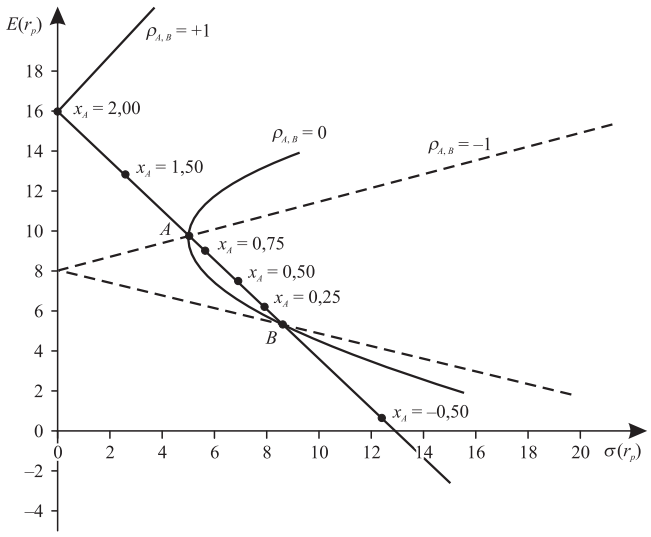
gdzie x_i – waga i-tej akcji. Odchylenie standardowe dla portfela S_p określa się natomiast jako pierwiastek z sumy iloczynów postaci:

$$\mathrm{cov}(r_i, r_j) \cdot x_i \cdot x_j \,, \tag{4}$$

gdzie $i, j = 1, ..., m$. Wyrażenie $\mathrm{cov}(r_i, r_j)$ oznacza kowariancję obliczaną zgodnie ze wzorem:

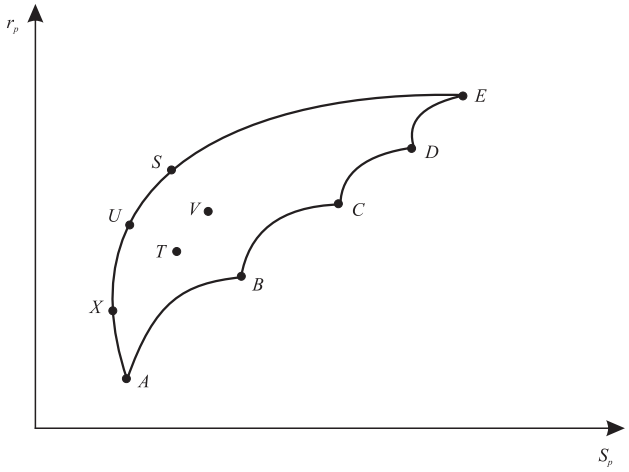
$$\mathrm{cov}(r_i, r_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(r_{ik} - Er_i)(r_{jk} - Er_j)}{n} \,. \tag{5}$$

Graficznie obrazem zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu portfela a ryzykiem portfela są, w przypadku portfela dwuskładnikowego, linie kombinacji. Na osi odciętych odmierzane są wartości odchylenia standardowego oczekiwanej stopy zwrotu, a na osi rzędnych wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Każdemu punktowi linii kombinacji odpowiada portfel o różnym udziale akcji w portfelu. Należy również podkreślić, iż kształt linii kombinacji zależy od wartości



Rys. 1. Linie kombinacji dla portfela dwuakcyjnego

Ź r ó d ł o: R. Haugen, *Modern Investment Theory*, Prentice Hall Inc., New Jersey 1993.



Rys. 2. Portfel akcji wielu spółek

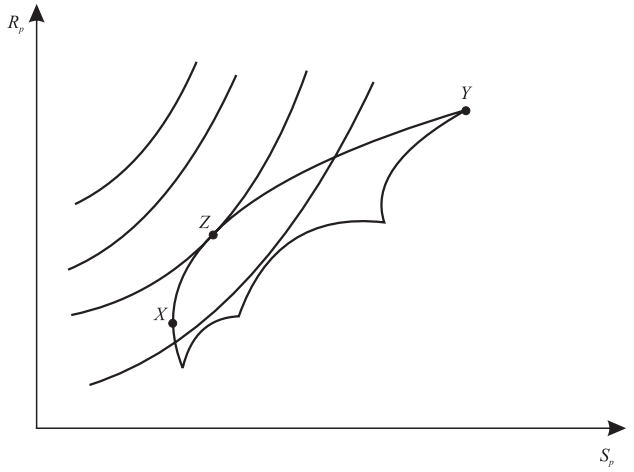
Ź r ó d ł o: K. Jajuga, T. Jajuga, *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, WN PWN, Warszawa 1997.

współczynnika korelacji pomiędzy badanymi akcjami. W zależności od jego wartości otrzymujemy całą rodzinę linii kombinacji, co prezentuje rysunek 1.

W przypadku akcji wielu spółek zbiór wszystkich możliwych portfeli można zilustrować jak pokazano na rysunku 2.

Znając oczekiwaną stopę zwrotu i odchylenie standardowe dla portfeli, gracz giełdowy musi podjąć decyzję o wyborze jednego z nich. Łatwo jest wskazać graczowi, który wybór jest błędny ze względu na to, iż istnieją portfele o takim samym stopniu ryzyka, ale o wyższej stopie zwrotu. Analogicznie gracz nie powinien wybierać portfela, gdy można zbudować portfel o takiej samej stopie zwrotu, a mniejszym poziomie ryzyka. Zbiór wszystkich portfeli, jakie można utworzyć z rozpatrywanej populacji akcji nazywa się zbiorem możliwości[2]. Krzywa ograniczająca zbiór możliwości to zbiór minimalnego ryzyka, czasami nazywany pociskiem Markowitza. Wszystkie portfele leżące w nim posiadają najniższe, możliwe do osiągnięcia odchylenia standardowe dla zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Jeżeli dodatkowo na portfel zostanie nałożony warunek, iż posiada on najwyższą możliwą do osiągnięcia stopę zwrotu, przy zadanym poziomie ryzyka, otrzymuje się tzw. zbiór efektywny, będący górną częścią zbioru minimalnego ryzyka rozpoczynającą się punktem o najniższym ryzyku, zwanym globalnym portfelem minimalnego ryzyka. Z punktu widzenia gracza, biorąc pod uwagę tylko odchylenie standardowe i oczekiwaną stopę zwrotu, zbiór efektywny określa najlepsze portfele.

[2] R. Haugen, op. cit.



Rys. 3. Wybór portfela maksymalnej użyteczności

Ź r ó d ł o: K. Jajuga, T. Jajuga, *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, WN PWN, Warszawa 1997.

Decyzja wyboru konkretnego portfela spośród zbioru efektywnego jest indywidualną decyzją gracza i zależy od jego skłonności do ryzyka. Jednym ze sposobów wskazania postępowania jest wykorzystanie krzywych obojętności. W tym przypadku gracz powinien wybrać portfel będący punktem styczności krzywej obojętności do zbioru efektywnego. W ten sposób gracz otrzymałby tzw. portfel maksymalnej użyteczności (portfel *Z* na rys. 3), każdy inny bowiem leży na krzywej obojętności odpowiadającej niższej wartość funkcji użyteczności.

Niestety, metoda ta wymaga wyznaczenia rzeczywistych krzywych obojętności dla danego gracza, co w praktyce stwarza wiele problemów.

2. Gry kooperacyjne

Za historyczny moment narodzin teorii gier uważa się rok 1944, będący rokiem wydania monografii *Teoria gier i postępowanie ekonomiczne* autorstwa Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna, chociaż za prekursorski model uznano dziewiętnastowieczny model duopolu Cournota. Można także wspomnieć o polskim wkładzie w rozwój nowej teorii dzięki pracy Hugo Steinhausa z roku 1925 zatytułowanej *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*. Świat od zawsze zaabsorbowany był zagadnieniami konfliktu. Gracz znajduje się w nim w sytuacji prowadzącej do jednego z wielu możliwych wyników, co do których ma

określone preferencje. Nie ma on jednak całkowitego wpływu na wynik, który może leżeć w gestii innych graczy, dążących do jakiegoś wyniku, a których preferencje są na ogół różne. Może on także zależeć od pewnego zdarzenia losowego. Teoria gier jest próbą stworzenia teorii dla wyjaśnienia sposobów postępowania w tego rodzaju sytuacjach. Jest próbą zastosowania narzędzi matematycznych do wyjaśniania zachowania się w sytuacjach konfliktowych. Należy jednak podkreślić, iż stanowi ona opis sytuacji przede wszystkich konfliktowych, ale nie tylko. Obejmuje również sytuacje, w których interesy graczy są zgodne, ale ze względu na trudności w porozumiewaniu się trudno jest im ustalić wspólny sposób postępowania.

Gry mogą mieć charakter ściśle konkurencyjny i nieściśle konkurencyjny. W przypadku gier ściśle konkurencyjnych fakt preferowania przez I gracza rozwiązania (i, j) nad rozwiązaniem (k, l) pociąga za sobą fakt preferowania przez II gracza rozwiązania (k, l) nad rozwiązaniem (i, j). Jeżeli pewne rozwiązania są indyferentne dla gracza I, to są także indyferentne dla gracza II. W przypadku klasy gier nieściśle konkurencyjnych istnieje co najmniej jedno rozwiązanie (i, j) takie, że gracz I przedkłada je nad (k, l), ale gracz II nie przedkłada rozwiązania (k, l) nad rozwiązanie (i, j). W przypadku gier ściśle konkurencyjnych dla graczy nie jest korzystna jakakolwiek forma współpracy. Natomiast w przypadku gier nieściśle konkurencyjnych współpraca może zapewnić obopólne korzyści, dlatego też należy rozważyć tę klasę gier w dwóch wariantach: gry kooperacyjnej i gry niekooperacyjnej. W przypadku gier niekooperacyjnych porozumiewanie się przed grą jest niedozwolone i często nieopłacalne. W grze kooperacyjnej gracze mogą swobodnie porozumiewać się w celu uzyskania wiążących umów. W pracy wykorzystane zostaną wybrane narzędzia gier dwuosobowych kooperacyjnych.

Dwuosobowe gry kooperacyjne zakładają zatem możliwość porozumienia się graczy przed grą i wspólny wybór pewnego rozwiązania. Zakłada się, że w trakcie negocjacji gracze otrzymują pełną informację, umowy są wiążące, czyli gracze nie mogą zyskać poprzez oszustwo, stosunek gracza do funkcji wypłaty nie zmienia się w trakcie negocjacji oraz gracz musi przystąpić do rozmów. W grze kooperacyjnej gracze mogą rozszerzyć tradycyjny obszar wypłat w danej grze poprzez korelowanie swoich strategii mieszanych. Gdy gracze współdziałają, mogą zastosować łączne strategie zrandomizowane[3], czyli strategie zrandomizowane ustalone przez obydwu graczy, przy czym nie każda łączna randomizacja daje się zrealizować przez niezależny wybór strategii mieszanych. Gracze oczywiście ograniczają utworzony w ten sposób zbiór do zbioru strategii łącznie niezdominowanych, gdzie punkt (α, β) jest łącznie zdominowany przez (α_1, β_1), jeżeli $\alpha_1 \geq \alpha$ oraz $\beta_1 \geq \beta$. Jest to tzw. łączny zbiór maksymalny. W tym momencie gracze nie mogą już dłużej współdziałać w celu osiągnięcia wspólnych korzyści, ich preferencje stają się przeciwstawne. Neumann

[3] R. Luce, H. Raiffa, *Games and decisions. Introduction and Critical Survey*, John Wiley & Sons Inc., New York 1964.

i Morgenstern stwierdzili, iż trudno jest wymagać od gracza, aby zgodził się on na rozwiązanie dające mu mniejszą wygraną niż ta, którą może sobie zapewnić sam. Wykluczyli więc dodatkowo punkty dające mniej niż wygrana w przypadku niekooperacyjnej wersji tej gry realizowanej przez strategię maksyminową z łącznego zbioru maksymalnego. W ten sposób otrzymuje się obszar negocjacji gry będący rozwiązaniem gier kooperacyjnych von Neumanna i Morgensterna. Jednakże wydaje się rozsądne w pewnych szczególnych przypadkach założenie, iż gracze gotowi są nawet do pewnych ustępstw, aby uzyskać rozwiązanie satysfakcjonujące obydwie strony. Wybór konkretnego punktu z tego obszaru zależy już od aspektów psychologicznych. W tym momencie gracze nie mogą już współdziałać w celu osiągnięcia wspólnych korzyści. Niemożność wyboru jednego punktu powoduje, iż gracze skłonni są zaakceptować tzw. schemat arbitrażowy, czyli funkcję, która przyporządkowuje każdej grze dwuosobowej nieściśle konkurencyjnej jedną jedyną wypłatę. Jedna z metod postępowania zaproponowana została przez Harsanyiego i Zeuthena, którzy sugerowali, aby ten z graczy ustąpił, którego relatywna strata jest mniejsza[4]. Niech gracz I proponuje rozwiązanie (α_1, β_1), gracz II natomiast dąży do rozwiązania (α_2, β_2). Gracz I powinien ustąpić wtedy i tylko wtedy, gdy strata relatywna ponoszona przez niego jest mniejsza, czyli spełniona jest nierówność

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \leq \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2}, \tag{6}$$

a gracz II powinien ustąpić, jeżeli

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \geq \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2}. \tag{7}$$

Ustępstwo nie oznacza akceptacji żądań przeciwnika, gdyż ustępujący gracz może zaproponować inne rozwiązanie, które nie pociągałoby jednak za sobą następnych ustępstw w dalszych negocjacjach.

3. Konstrukcja portfela akcji jako gry portfelowej

Zadaniem gracza giełdowego jest przede wszystkim znalezienie portfela satysfakcjonującego go pod względem zarówno spodziewanego zysku, jak i poziomu

[4] J. Harsanyi, *Approaches to Bargaining Problem Before and After the Theory of Games: critical Discussion of Zeuthen's, Hick's and Nash's theories*, „Econometrica" 1956, No. 24, s. 144-157; F. Zeuthen, *Problems of Monopoly and Economic Welfare*, Routledge and Sons, London 1930.

ryzyka. Z jednej strony dąży on do jak najwyższej wartości oczekiwanego zysku, a z drugiej do jak najmniejszego ryzyka. Który portfel powinien zostać wskazany graczowi, jako ten, który w pełni go zadowala? Rozwiązanie tak postawionego problemu znalezione zostanie z wykorzystaniem teorii gier. Poszukiwanie odpowiedniego portfela potraktować można jako grę dwuosobową. Niech pierwszym graczem w przedstawianej grze będzie ta strona ludzkiej natury, która jest odpowiedzialna za „ostrożność i rozwagę", a drugim ta, która jest odpowiedzialna za – nazwijmy ją w przenośni – „żądzę pieniądza". Wypłatą dla gracza I niech będą poziomy ryzyka dla portfeli, a wypłatą dla gracza II – oczekiwane wartości zysku z portfeli. Graczowi I zależy więc na jak najmniejszym ryzyku, a graczowi II na jak największej wygranej. Nie jest to gra antagonistyczna, ponieważ nie zawsze dobra strategia dla gracza I jest złą dla gracza II. Może się znaleźć portfel, który będzie miał wysoki poziom ryzyka i równocześnie niską wartość oczekiwaną zysku, przez co nie będzie zadowalał żadnego z graczy. Na pewno można jednak tę grę traktować jako kooperacyjną, biorąc pod uwagę, iż jest to wewnętrzny konflikt gracza. Dodatkowo można także założyć, że gracze gotowi są nawet do pewnych ustępstw, aby znaleźć rozwiązanie satysfakcjonujące obydwu z nich. Zakłada się więc, że rozwiązanie musi należeć do łącznego zbioru maksymalnego i w nim należy poszukać rozwiązania arbitrażowego.

W celu wyjaśnienia sposobu postępowania wykorzystany zostanie przykład oparty na danych pochodzących z GPW w Warszawie. Za miarę zysku przyjęto oczekiwaną stopę zwrotu, a za miarę ryzyka odchylenie standardowe. Zadaniem gracza giełdowego jest skonstruowanie portfela składającego się z akcji dwóch spółek: Positive Advisory SA i Internet Group SA. Spółki te zostały wybrane do portfela jako najlepsze inwestycje na giełdzie zgodnie z miesięczną stopą zwrotu do 17 czerwca 2011, podane przez Dom Maklerski BDM SA[5]. Tabela 1 przedstawia obliczone na podstawie 50 obserwacji oczekiwane stopy zwrotu wraz z odchyleniem standardowym dla podanych spółek.

Tabela 1. Charakterystyki Positive Advisory SA i Internet Group SA w dniu 17.06.2011 wyznaczone na podstawie 50 obserwacji

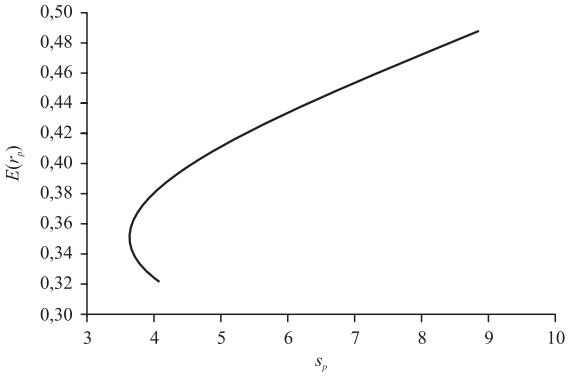
Spółka	Oczekiwana stopa zwrotu	Odchylenie standardowe
Positive Advisory SA	0,4860	8,843839
Internet Group SA	0,3232	4,069942

Ź r ó d ł o: opracowanie własne na podstawie danych www.money.pl [17.06.2011].

Na podstawie wyznaczonych oczekiwanych stóp zwrotu i odchyleń standardowych dla poszczególnych spółek wyznaczono oczekiwane stopy zwrotu wraz

[5] www.money.pl [17.06.2011].

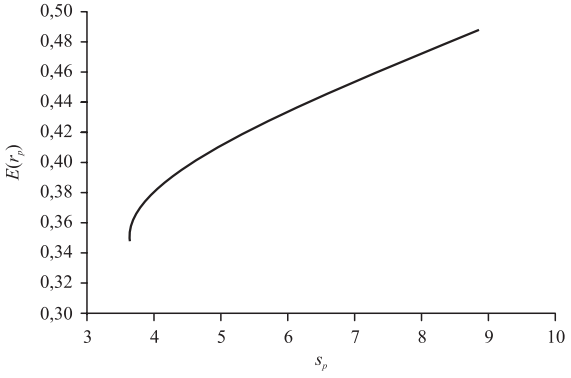
z odchyleniami standardowymi dla portfeli zbudowanych z analizowanych dwóch spółek przy zmieniających się ich udziałach w portfelu. Uzyskane rezultaty zostały przedstawione na rysunku 4.



Rys. 4. Zbiór portfeli złożonych z akcji IGROUP i POSITIVE 17.06.2011

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Oczywiście w pierwszym kroku należy ograniczyć przedstawiony zbiór do portfeli tworzących zbiór efektywny modelu Markowitza (rys. 5).



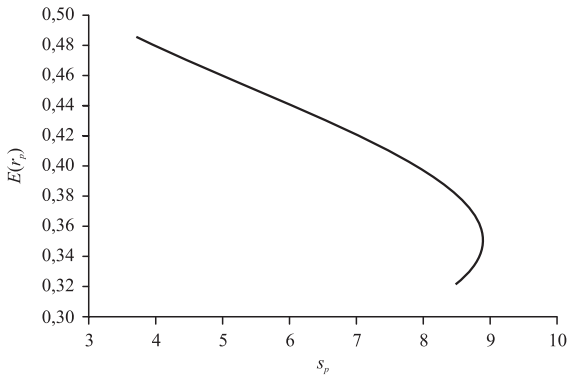
Rys. 5. Zbiór efektywny portfeli w modelu Markowitza

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Zbiór ten tworzą najlepsze portfele. Proponując portfel, który nie należy do tego zbioru zawsze możemy wskazać inny lepszy od danego pod względem albo wysokości oczekiwanej stopy zwrotu, albo poziomu ryzyka. Na przykład wybór portfela: $S_p = 3{,}8$ i $E(r_p) = 0{,}337$ (co oznacza 8% akcji IGROP i 91% akcji POSITIVE) jest nierozsądny ze względu na możliwość wyboru portfela: $S_p = 3{,}8$ i $E(r_p) = 0{,}366$ (co oznacza 27% akcji IGROP i 73% akcji POSITIVE). Od tego

momentu decyzja wyboru konkretnego portfela spośród zbioru efektywnego jest indywidualną decyzją gracza i zależy od jego skłonności do ryzyka. Jednym ze sposobów postępowania jest wykorzystanie krzywych obojętności i wyznaczenie portfela maksymalnej użyteczności. Metoda ta wymaga jednak wyznaczenia dla realnego gracza krzywych obojętności, co jest procesem bardzo skomplikowanym i stwarzającym duże problemy. W pracy tej znajdziemy rozwiązanie problemu wyboru najlepszego portfela dla gracza giełdowego, który z jednej strony dąży do jak największego zysku, ale oczywiście z drugiej obawia się ryzyka, wykorzystując narzędzia teorii gier.

Aby przeanalizować sposób postępowania, należy spojrzeć na rysunek 3 nie jak na zbiór portfeli, ale jak na zbiór możliwych wypłat w pewnej grze. Oczywiście aby otrzymać klasyczną postać gry (aby obydwaj gracze dążyli do jak największej wygranej; w niezmienionej wersji gracz I dążyłby do jak najmniejszej wygranej – najmniejszego odchylenia standardowego), przeprowadzono transformację zbioru wypłat przez symetrię pionową (oś symetrii umieszczono w połowie zakresu S_p). Na rysunku 6 przedstawiono zbiór wszystkich możliwych wypłat w grze portfelowej po transformacji. Po jej dokonaniu obydwaj gracze dążą już do uzyskania jak największej wypłaty.

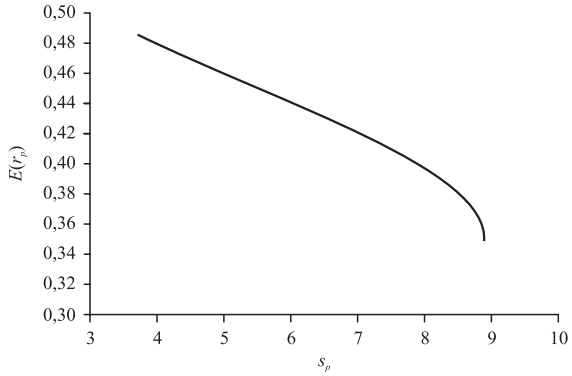


Rys. 6. Zbiór wszystkich możliwych wypłat w grze portfelowej
(IGROUP i POSITIVE 17.06. 2011)

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

W ten sposób otrzymano zbiór wszystkich możliwych wypłat w grze. Oczywiście gracze ograniczą swój wybór tylko do zbioru strategii łącznie niezdominowanych i w ten sposób otrzymujemy łączny zbiór maksymalny (przedstawiony na rys. 7).

Zbiór rozwiązań tworzących łączny zbiór maksymalny to równocześnie zbiór efektywny modelu Markowitza. Można powiedzieć, iż łączny zbiór maksymalny w terminologii teorii gier to zbiór efektywny w terminologii modelu Markowitza. Obydwa zbiory składają się z tych samych portfeli.



Rys. 7. Łączny zbiór maksymalny (IGROUP i POSITIVE 17.06. 2011)

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Po ograniczeniu rozwiązań do łącznego zbioru maksymalnego gracze nie mogą dłużej współpracować, ich dążenia stają się przeciwstawne. Gracz I proponuje rozwiązanie (8,884; 0,352), natomiast gracz II (3,697; 0,486). Do rozwiązania problemu użyto metody Harsanyiego i Zeuthena.

Gracz I proponuje więc na wstępie rozwiązanie (8,884; 0,352), natomiast gracz II (3,697; 0,486). Relatywna strata gracza I wynosi wówczas

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{8{,}844 - 3{,}697}{8{,}844} = 0{,}582\,, \tag{8}$$

natomiast relatywna strata gracza II –

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} = \frac{0{,}486 - 0{,}352}{0{,}486} = 0{,}276\,. \tag{9}$$

Relatywna strata gracza II jest mniejsza, a więc musi on ustąpić. Może jednak wskazać inny punkt, który nie pociągałby za sobą następnych ustępstw, czyli punkt o iloczynie składowych co najmniej takim, jak iloczyn „żądania" przeciwnika, na przykład (8,262; 0,388). W tej sytuacji relatywna strata gracza I wynosi

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{8{,}844 - 8{,}262}{8{,}844} = 0{,}066\,, \tag{10}$$

a relatywna strata gracza II –

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} = \frac{0{,}388 - 0{,}352}{0{,}388} = 0{,}093\,. \tag{11}$$

Relatywna strata gracza I jest mniejsza, więc musi ustąpić. Może on jednak zaproponować rozwiązanie (8,768; 0,364). Relatywna strata gracza I wynosi wówczas

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{8{,}768 - 8{,}262}{8{,}768} = 0{,}058\,, \tag{12}$$

a relatywna strata gracza II –

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} = \frac{0{,}388 - 0{,}364}{0{,}388} = 0{,}062\,. \tag{13}$$

Relatywna strata gracza I jest mniejsza, więc musi on ponownie ustąpić. Kontynuując postępowanie w analogiczny sposób, gracze osiągną w końcu punkt (8,547; 0,378). Jest to rozwiązanie gry portfelowej w sensie Zeuthena i Harsanyiego. Stąd rzeczywisty portfel (po uwzględnieniu transformacji) będący rozwiązaniem charakteryzuje się odchyleniem standardowym S_p = 3,944 i wartością oczekiwaną $E(r_p)$ = 0,378. Oznacza to, iż portfel powinien składać się z 33% akcji spółki IGROUP i 67% akcji spółki POSITIVE. W ten sposób otrzymano pewnego rodzaju uniwersalny portfel maksymalnej użyteczności na podstawie metody Zeuthena i Harsanyiego.

Wnioski

Gracz giełdowy, znając oczekiwany poziom zysku i ryzyka dla poszczególnych strategii (wyboru portfela), może wykorzystać narzędzia teorii gier do podjęcia decyzji o wyborze portfela. Metoda postępowania została przedstawiona i opisana w niniejszym artykule. Model Markowitza opisano jako pewną grę (wewnętrzny konflikt gracza) i rozwiązano ją korzystając z metod teorii gier kooperacyjnych. Za miarę zysku przyjęto oczekiwaną stopę zwrotu, a za miarę ryzyka odchylenie standardowe, jednakże opisane postępowanie oparte na teorii gier możliwe jest w przypadku użycia dowolnej innej miary zysku czy ryzyka.

Aby wyjaśnić wszystkie mechanizmy rządzące giełdą, należałoby potraktować ją jako jedną gigantyczną grę z wieloma graczami, co wydaje się zadaniem zbyt obszernym i złożonym. Trudny do rozwiązania jest już problem określenia rodzaju gry. Ze względu na ponoszone koszty, takie jak opłata biura maklerskiego, grę na giełdzie można uznać za grę o sumie ujemnej. Jeżeli potraktujemy maklera w naszej grze jako kolejnego gracza, to wówczas można uznać ją za grę o sumie zerowej. Jeżeli natomiast weźmiemy pod uwagę także pozafinansowy rodzaj wypłaty, na przykład samozadowolenie gracza z możliwości ponoszenia ryzyka,

to może być to gra nawet o sumie dodatniej. W zależności od podejścia, możemy więc otrzymać szereg różnorodnych możliwych rozwiązań w zależności od nastawienia graczy i ich tendencji, biorąc pod uwagę nie tylko aspekt finansowy, ale również psychologiczny. Dlatego też próba opisu funkcjonowania giełdy jako jednej wielkiej gry wydaje się nasuwać zbyt wiele wątpliwości, problemów i pytań. Na pewno można jednak wykorzystywać pewne narzędzia teorii gier do rozwiązywania zadań cząstkowych stojących przed inwestorem giełdowym.

Literatura

Harris L., *The Winners and Losers of Zero - Sum Game: The origins of Trading Profits, Price Efficiency and Market Liquidity*, University of Southern California, California 1993.

Harsanyi J., *Approaches to Bargaining Problem Before and After the Theory of Games: critical Discussion of Zeuthen's, Hick's and Nash's theories*, „Econometrica" 1956, No. 24, s. 144-157.

Haugen R., *Modern Investment Theory*, Prentice Hall Inc., New Jersey 1993.

Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, WN PWN, Warszawa 1997.

Luce R., Raiffa H., *Games and decisions. Introduction and Critical Survey*, John Wiley & Sons Inc., New York 1964.

Markowitz H., *Portfolio selection*, „Journal of Finance" 1966, t. 7, s. 77-91.

Neuman J., Morgenstern O., *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton 1953.

Zeuthen F., *Problems of Monopoly and Economic Welfare*, Routledge and Sons, London 1930.

The choice of portfolio as based on the theory of games

Summary. During gambling on the stock exchange the problem of the choice of proper portfolio appears. The player wants the impossible: both great profit and low risk. It is reasonable for him to limit the choice only to portfolios which belong to the efficient set. The decision of the choice of a particular portfolio is individual and depends on the player and his aversion to the risk. In this article this problem is presented as the game, that is the inner conflict of the player. On the one hand, he expects a great profit, yet, on the other hand, he expects a low risk. Which portfolio should be pointed out to give the satisfaction to the player? For the purpose of solving this problem one game is formulated and described. The solution of this problem is found in the theory of cooperative games and in the use of Zeuthen and Harsanyi's model and applied on the stock exchange in Warsaw.

Key words: choice of portfolio, cooperative games, model of Harsanyi and Zeuthen