Zeszyty Naukowe
Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu
Nr 7(45)/2014

Katarzyna Król
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

Artur Stefański
Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu

Metodyka budowy modelu prognozowania bankructwa na przykładzie sektora budowlanego

Streszczenie. Celem niniejszego artykułu było stworzenie skutecznego modelu dyskryminacyjnego, pozwalającego na przewidzenie upadłości przedsiębiorstw. Próbę badawczą stanowiły 24 podmioty sektora budowlanego, a dane finansowe wykorzystane do budowy modelu pochodziły z lat 2010-2011. Przy konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej wzięto pod uwagę 26 wskaźników finansowych. Największą sprawność ogólną (na poziomie 83,33%) osiągnął model M12. Badanie skłania do wniosku, na podstawie wysokiej poprawności klasyfikacji bankrutów na rok przed upadłością oraz niskiej skuteczności tych przewidywań dla podmiotów istniejących, że duży wpływ na wyniki miał kryzys, który w latach 2010-2012 dotknął branżę budowlaną. Nie bez znaczenia pozostaje również fakt, iż podmioty, a zwłaszcza te, które przechodzą trudności, niechętnie publikują swoje wyniki finansowe.

Słowa kluczowe: analiza dyskryminacyjna, bankructwo, sektor budowlany

Wprowadzenie

Bankructwo to jeden z nieodłącznych aspektów funkcjonowania przedsiębiorstw w gospodarce rynkowej. W skali mikro zjawisko to ma bez wątpienia wydźwięk negatywny, jednakże w ujęciu globalnym jest procesem umożliwiającym oczyszczenie gospodarki z podmiotów, które nie działają na tyle efektywnie, aby sprostać wymaganiom rynku.

To, czy dane przedsiębiorstwo zagrożone jest bankructwem, ma istotne znaczenie dla wielu podmiotów działających w jego otoczeniu. Dostawcy chcą mieć

pewność, że ich należności zostaną uregulowane, kredytodawcy, że otrzymają pożyczony kapitał wraz z odsetkami, a właściciele, że nie tylko nie stracą zainwestowanego majątku, ale również osiągną zysk. Pełna analiza sytuacji finansowej przedsiębiorstwa jest jednak bardzo czasochłonna. W związku z tym starano się opracować metodę, która w szybki i pewny sposób pozwoliłaby na postawienie trafnej diagnozy w kwestii kondycji finansowej przedsiębiorstwa. Dzięki temu możliwe stało się zidentyfikowanie ryzyka upadłości z odpowiednim wyprzedzeniem czasowym, a to z kolei pozwala kadrom zarządzającym na podjęcie odpowiednich kroków i zapobiegnięcie bankructwu firmy[1].

Co do zasady, bankructwo nie jest procesem nagłym, a symptomy pogarszającej się sytuacji ekonomicznej podmiotu można odnaleźć w sprawozdaniach finansowych nawet na kilka lat przed ogłoszeniem upadłości. Fakt ten stał się bodźcem do stworzenia wielu systemów wczesnego ostrzegania, które z dość dużym wyprzedzeniem i stopniem pewności pozwalają na przewidzenie możliwości bankructwa. Jedną z metod najczęściej wykorzystywanych przy prognozowaniu upadłości jest analiza dyskryminacyjna. Bazując na kilku lub kilkunastu wskaźnikach finansowych, pozwala ona na stworzenie jednego syntetycznego miernika, którego wartość klasyfikuje jednoznacznie badane przedsiębiorstwo jako zagrożone bankructwem bądź nie.

Skonstruowanie skutecznego modelu prognozowania upadłości przedsiębiorstw opartego na analizie dyskryminacyjnej dla branży budowlanej i deweloperskiej jest celem niniejszego opracowania.

1. Analiza dyskryminacji wśród metod prognozowania bankructwa

Mnogość zastosowań modeli służących przewidywaniu upadłości oraz różnorodna specyfika działalności gospodarczej powodują, iż nie istnieje jedna uniwersalna metoda prognozowania bankructwa. Przedsiębiorstwa różnią się wielkością, typem działalności, branżą, w której działają, czy chociażby wiekiem. Z tego też powodu wielkości wskaźników finansowych, które dla jednego typu przedsiębiorstw są sygnałem poważnych trudności finansowych, dla pozostałych mogą być wynikiem pożądanym, a modele bardzo dobrze sprawdzające się w określonych warunkach, przy zmianie pewnych parametrów mogą wskazywać na zupełnie różne wnioski.

Metody przewidywania upadłości można podzielić ze względu na różnorodne kryteria. Bez wątpienia najprostszym i najbardziej intuicyjnym jest podział

[1] T. Karol, *Systemy ostrzegania przed ryzykiem upadłości*, Wolters Kluwer, Warszawa 2010, s. 87.

uwzględniający rodzaj wykorzystywanych danych. Wyróżnia się więc w jego obrębie metody ilościowe, czyli takie, które opierają się wyłącznie na danych mierzalnych, metody jakościowe, wykorzystujące dane niemierzalne, oraz metody mieszane. Na potrzeby niniejszego artykułu, najbardziej praktycznym będzie jednak podział uwzględniający sposób wnioskowania na temat poziomu ryzyka niewypłacalności przedsiębiorstwa, zgodnie z którym wyróżnia się metody logiczno-indukcyjne oraz empiryczno-dedukcyjne[2].

Grupa metod logiczno-dedukcyjnych, inaczej zwanych tradycyjnymi bądź opisowymi, zakłada dokonywanie oceny zdolności płatniczej przedsiębiorstwa na podstawie czynników, które opisują bieżącą sytuację finansowo-ekonomiczną podmiotu, takich jak elementy sprawozdań jednostki czy wskaźniki finansowe.

Odmienne podejście metod empiryczno-indukcyjnych polega na zastosowaniu wnioskowania matematyczno-statystycznego. Ocena ryzyka upadłości danego przedsiębiorstwa opiera się na zgromadzonym materiale statystycznym i zależnościach wykrytych na podstawie analizy innych jednostek. U podstaw tej grupy metod leży założenie, iż przedsiębiorstwa dzielą się na dwa rozłączne zbiory: tych jednostek, które aktualnie znajdują się w dobrej kondycji finansowej oraz podmiotów upadłych, a porównywanie parami wyników przedstawicieli obu grup pozwala na zidentyfikowanie zależności pomiędzy wartością analizowanego miernika i zagrożeniem ryzykiem upadłości, co w efekcie daje możliwość zaklasyfikowania badanego przedsiębiorstwa do odpowiedniej grupy. Zbiór metod empiryczno-indukcyjnych dzieli się dalej na metody jedno- i wielowymiarowe. Metody jednowymiarowe, zwane również testem dychotomicznym, polegają na oddzielnym analizowaniu każdej zmiennej i określeniu jej granicznej wartości, która oddziela jednostki zagrożone upadłością od tych, które znajdują się w dobrej kondycji ekonomiczno-finansowej. Metody wielowymiarowe, zwane również wielowymiarową analizą dyskryminacyjną, poddają natomiast jednoczesnej analizie kilka wskaźników, do których wcześniej zostały przypisane odpowiednie wagi[3].

Po raz pierwszy wielowymiarową analizę dyskryminacji zastosowano w 1930 r. roku w Stanach Zjednoczonych, gdzie wykorzystano ją do weryfikacji badań z zakresu nauk przyrodniczych. W zarządzaniu finansami przedsiębiorstw z powodzeniem wykorzystał ją dopiero Edward Altman, który w roku 1968, łącząc wielowymiarową analizę dyskryminacji z tradycyjną analizą wskaźnikową, stworzył model wczesnego ostrzegania przedsiębiorstw przed ryzykiem bankructwa, pozwalający przewidzieć upadłość podmiotu już z dwuletnim wyprzedzeniem. Zapoczątkował on gwałtowny rozwój modeli dyskryminacyjnych, które niejednokrotnie pozwalały na postawienie trafnej diagnozy w ponad dziewięćdziesięciu

[2] P. Antonowicz, *Metody oceny i prognoza kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw*, Ośrodek Doradztwa i Doskonalenia Kadr, Gdańsk 2007, s. 28.

[3] M. Zaleska, *Identyfikacja ryzyka upadłości przedsiębiorstwa i banku. Systemy wczesnego ostrzegania*, Difin, Warszawa 2002, s. 17-18.

procentach przypadków. Model stworzony przez Altmana stał się podstawą dla kolejnych systemów, które bardzo często różniły się jedynie wagami poszczególnych wskaźników. Również w Polsce, gdzie w zakresie przewidywania upadłości przedsiębiorstw dominowała analiza wskaźnikowa, zaczęto stosować modele dyskryminacyjne tworzone w krajach wysoko rozwiniętych. Jednakże dla gospodarki, w której dokonywała się transformacja, zachodnie modele nie charakteryzowały się tak wysoką trafnością prognoz, jak w krajach macierzystych. Polskie modele dyskryminacyjne przeżyły swój największy rozwój w latach dziewięćdziesiątych XX w., a istotny wkład w ich tworzenie wnieśli między innymi Dorota Hadasik, Ewa Mączyńska, Jerzy Gajdka i Daniel Stos[4].

Prostota obliczeń, a także relatywnie wysoka skuteczność sprawiają, że analiza dyskryminacyjna należy do najczęściej używanych narzędzi estymowania upadłości. Według Artura Hołdy[5], używana jest ona przez biegłych rewidentów w około 30% wykonywanych badań, co w porównaniu z metodą logitową (21%), metodą sztucznych sieci neuronowych (9%) czy też metodą drzew decyzyjnych (6%), czyni ją metodą najpowszechniejszą.

2. Dobór próby badawczej

Założeniem autorów pracy było stworzenie modelu umożliwiającego identyfikację ryzyka upadłości, który byłby jak najbardziej aktualny i dostosowany do warunków polskiej gospodarki. W tym celu stworzono listę spółek, co do których w 2012 r. zostało wydane postanowienie o ogłoszeniu upadłości. Z danych zawartych w Monitorze Sądowym i Gospodarczym wyłoniono 897 takich podmiotów. Mimo tak obszernej próby, udało się wyodrębnić z niej jedynie 16 przedsiębiorstw, które w Monitorze Polskim B ogłosiły sprawozdanie finansowe z roku poprzedzającego upadłość. Zbiór ten był więc zbyt ubogi, aby stworzyć na jego podstawie reprezentatywną próbę przedsiębiorstw pochodzących z tej samej lub podobnej branży bądź też sektora.

Najliczniejszy podzbiór powyższej grupy stanowiły przedsiębiorstwa branży budowlanej i deweloperskiej (5 podmiotów). Zgodnie z raportem firmy Coface[6], w 2012 r. upadło ich aż 218, co stanowi blisko 25% wszystkich upadłości. Z tego też względu ostateczną próbę badawczą stanowiło 12 firm branży budowlanej i deweloperskiej, co do których w latach 2011 i 2012 wydano postanowienie

[4] T. Karol, op. cit., s. 98-99.

[5] A. Hołda, *Kontynuacja działalności jednostki i modele ostrzegające przed upadłością*, Wydawnictwo KiBR, Warszawa 2007, s. 95.

[6] www.coface.pl/CofacePortal/ShowBinary/BEA%20Repository/PL/pl_PL/documents/Raport_Coface_Upadlosci_caly2012, [23.09.2013].

o ogłoszeniu upadłości oraz 12 przedsiębiorstw tej samej branży, które kontynuowały swoją działalność co najmniej do dnia 30 czerwca 2013. Wszystkie te podmioty spełniały następujące założenia:

1) dla jednostek upadłych w 2011 r. dostępne było sprawozdanie finansowe sporządzone na dzień 31.12. 2010, a dla podmiotów upadłych w roku 2012 zostało opublikowane sprawozdanie na dzień 31.12. 2011; dla drugiej grupy, jeżeli nie opublikowano sprawozdania na dzień 31.12. 2011, akceptowano również alternatywnie dane sporządzone na dzień 31.12. 2010, o ile upadłość została ogłoszona w dwóch pierwszych kwartałach 2012 r.;

2) dla każdego z przedsiębiorstw upadłych dobrano przedsiębiorstwo istniejące, w ten sposób, aby liczba podmiotów, dla których dostępne jest sprawozdanie finansowe z danego roku, była jednakowa w obu populacjach; starano się również, aby średnia wielkość sumy bilansowej była zbliżona dla obu populacji.

Zgromadzone obserwacje podzielono losowo na dwie równoliczne grupy: próbę uczącą i próbę walidacyjną. Każda z nich zawierała po 6 podmiotów upadłych i 6 podmiotów w dobrej kondycji ekonomicznej. Te przedsiębiorstwa, które zbankrutowały i w pracy tworzyły próbę uczącą oznaczono jako $BU_1 - BU_6$. Przez $BT_1 - BT_6$ oznaczono bankrutów, których dane finansowe wykorzystano w celu testowania skuteczności modelu. Analogicznie, $IU_1 - IU_6$ oraz $IT_1 - IT_6$ oznaczają podmioty istniejące, stanowiące próbę uczącą i testową odpowiednio.

3. Dobór wskaźników finansowych

Za wyjściową bazę wskaźników finansowych branych pod uwagę przy konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej przyjęto wskaźniki występujące w najskuteczniejszych, na podstawie badań dotychczasowych[7], modelach prognozowania upadłości.

Na podstawie danych sprawozdawczych zgromadzonych dla przedsiębiorstw stanowiących próbę uczącą, obliczono wszystkie te wskaźniki finansowe wymienione w cytowanej wyżej publikacji, na które pozwoliły dostępne dane finansowe. Otrzymano łącznie 26 wskaźników charakteryzujących płynność finansową, rentowność, wypłacalność i sprawność działania przedsiębiorstw. Ich konstrukcję oraz wartości przedstawiono w tabelach 1 i 2.

[7] Szerzej zob. A. Stefański, *Analiza dyskryminacyjna na przykładzie wybranych modeli polskich i zagranicznych,* w: *Rozwój lokalny i regionalny. Innowacyjność i rozwój przedsiębiorczości*, red. M. Dylewski, „Zeszyty Naukowe WSB w Poznaniu" 2010, nr 27, s. 255-258.

Tabela 1. Wskaźniki finansowe wykorzystane przy konstrukcji modelu

Oznaczenie	Konstrukcja wskaźnika
W_1	kapitał obrotowy / aktywa ogółem
W_2	(aktywa obrotowe – zapasy) / zobowiązania krótkoterminowe
W_3	(należności × 365) / przychody ze sprzedaży
W_4	(zapasy × 365) / przychody ze sprzedaży
W_5	(zysk netto + amortyzacja) / zobowiązania ogółem
W_6	zysk netto/ zobowiązania ogółem
W_7	aktywa obrotowe / aktywa ogółem
W_8	aktywa obrotowe / zobowiązania krótkoterminowe
W_9	kapitał własny / aktywa ogółem
W_{10}	koszty operacyjne / zobowiązania krótkoterminowe
W_{11}	przeciętny stan zobowiązań krótkoterminowych / (koszty działalności operacyjnej – pozostałe koszty operacyjne)
W_{12}	przepływy pieniężne / zobowiązania ogółem
W_{13}	przychody ogółem / przeciętny stan aktywów ogółem
W_{14}	przychody ze sprzedaży / aktywa ogółem
W_{15}	suma aktywów / zobowiązania ogółem
W_{16}	zysk netto / przeciętny stan aktywów ogółem
W_{17}	zysk ze sprzedaży / przychody ze sprzedaży
W_{18}	zysk netto / zapasy
W_{19}	zobowiązania bieżące / aktywa ogółem
W_{20}	zobowiązania ogółem / aktywa ogółem
W_{21}	zysk brutto / przychody netto ze sprzedaży
W_{22}	zysk netto / aktywa ogółem
W_{23}	zysk operacyjny / aktywa ogółem
W_{24}	zysk operacyjny / przychody ze sprzedaży
W_{25}	zysk przed opodatkowaniem / kapitały własne
W_{26}	zysk ze sprzedaży / aktywa ogółem

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Aby wśród wszystkich obliczonych wskaźników wybrać te, które faktycznie pozwalają rozdzielić obie populacje, przeprowadzono dwa testy. Pierwszy – intuicyjny, polegający na obliczeniu średnich wartości każdego ze wskaźników dla całej próby oraz dla każdej z populacji z osobna i klasyfikacji poszczególnych obserwacji na podstawie średniej. Operacji tej dokonywano zgodnie z algorytmem:

1) niech $\overline{W_l}$ oznacza średnią wartość *i*-tego wskaźnika oraz niech $\overline{W_{l,J}}$, gdzie $j = \{0,1\}$ oznacza średnią wartość *i*-tego wskaźnika dla *j*-tej populacji; wówczas:

– jeżeli $\overline{W_{i,0}} \leq \overline{W_{i,1}}$, to dla każdej obserwacji z populacji π_0, jeżeli wartość *i*-tego wskaźnika jest mniejsza lub równa $\overline{W_l}$, to w prawidłowy sposób klasyfikuje on obserwacje; w przeciwnym przypadku klasyfikacja jest błędna,

– jeżeli $\overline{W_{i,0}} > \overline{W_{i,1}}$, to dla każdej obserwacji z populacji π_0, jeżeli wartość *i*-tego wskaźnika jest większa od $\overline{W_l}$, to w prawidłowy sposób klasyfikuje on obserwacje; w przeciwnym przypadku klasyfikacja jest błędna,

2) podmiotom, które na podstawie powyższych wartości zostały zaklasyfikowane do właściwej populacji, przypisano wartość 1, klasyfikacje błędne otrzymały wartość 0.

Macierz poprawności klasyfikacji dla poszczególnych wskaźników przedstawiono w tabeli 3. Dokonując jej wstępnej analizy można zauważyć, że klasyfikacja obserwacji na podstawie średniej wartości wskaźników odznacza się o wiele wyższą trafnością dla przedsiębiorstw upadłych. Dla dziesięciu wskaźników otrzymano stuprocentową poprawność klasyfikacji, podczas gdy dla przedsiębiorstw istniejących otrzymano ją jedynie dla dwóch wskaźników. Zależność tę potwierdza również średnia wartość klasyfikacji dla wszystkich wskaźników, która dla populacji bankrutów wynosi 78,85%, dla przedsiębiorstw istniejących natomiast jest to nieco ponad 50%.

Pogrubioną czcionką oznaczono wskaźniki, dla których poszczególne trafności klasyfikacji są równe co najmniej trafności, jaką można uzyskać przy całkowicie losowej klasyfikacji podmiotów do populacji (są więc większe bądź równe 50%), natomiast wskaźnik trafności ogólnej jest wyższy niż dla klasyfikacji losowej. Warunek ten spełnia 16 spośród 26 dostępnych wskaźników.

Analizując również liczbę wskaźników, które poprawnie zaklasyfikowały poszczególne przedsiębiorstwa, można zauważyć dużą dysproporcję pomiędzy populacjami, co wstępnie może wskazywać na fakt, że przedsiębiorstwa, które mimo iż nie ogłosiły upadłości i zostały użyte do konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej, mogły przechodzić trudności finansowe.

Kolejnym testem wykorzystanym do oceny zróżnicowania populacji na podstawie pojedynczych wskaźników jest statystyczny test istotności średnich. Testowana jest hipoteza zerowa, mówiąca o równości średnich w obu populacjach, przeciwko hipotezie alternatywnej, mówiącej o tym, że średnia dla jednej z populacji jest statystycznie istotnie wyższa, co formalnie zapisuje się jako:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_0 = \mu_1, \\ H_1: & \mu_0 < \mu_1. \end{cases}$$

Tabela 2. Wartości poszczególnych wartości wskaźników finansowych obliczonych dla przedsiębiorstw stanowiących próbę uczącą

Wskaźnik	Wartości dla poszczególnych przedsiębiorstw											
	BU_1	BU_2	BU_3	BU_4	BU_5	BU_6	IU_1	IU_2	IU_3	IU_4	IU_5	IU_6
W_1	–0,26453	–0,02682	0,119479	0,154407	–0,11908	0,152188	0,549464	0,266356	0,170641	0,071359	0,363365	0,647276
W_2	0,336395	0,243383	0,712127	1,178119	0,811825	1,369253	3,05731	1,610522	1,201234	1,106455	1,82935	2,699926
W_3	22,75071	18,03862	78,16623	119,2873	73,0719	82,51818	37,59454	3,768025	73,84834	44,91943	134,143	115,2176
W_4	15,41054	106,7056	50,92371	3,637576	1,926032	8,301614	5,269131	3,606264	623,6015	8,441498	0,193035	48,41363
W_5	–0,12296	0,086351	0,011803	0,098911	–0,00923	0,032534	0,902125	0,280234	2,226283	0,508565	0,428957	0,354757
W_6	–0,18156	0,014658	0,011803	0,098911	–0,00923	0,009863	0,847416	0,280234	1,596984	0,357891	0,317975	0,09476
W_7	0,323798	0,703352	0,852888	0,901999	0,574567	0,483139	0,802328	0,614072	0,214047	0,400966	0,800316	0,877675
W_8	0,550374	0,963268	1,162909	1,206539	0,828332	1,459848	3,172965	1,766016	4,93128	1,216496	1,831593	3,809369
W_9	0,245085	0,101175	0,180317	0,117911	0,234318	0,668197	0,600768	0,320833	9,486519	0,581564	0,313817	0,675038
W_{10}	5,653772	2,405989	0,188697	2,671602	3,059298	3,982891	6,576906	0,1362	3,317155	4,186475	3,762723	8,182982
W_{11}	0,142766	0,307974	4,857012	0,377504	0,28701	0,294094	0,37378	–9,68011	2,462788	0,190186	0,200043	0,194245
W_{12}	0,001528	–0,01548	–0,00775	–0,55941	0,026573	–1,3137	0,883405	–0,46341	–0,00796	0,247938	0,394309	–0,21073
W_{13}	3,183818	2,32077	0	0	2,36123	1,2304	1,734827	5,76923	0,208449	1,735487	2,254405	1,727701
W_{14}	2,981684	1,79802	2,369658	2,131923	2,169924	1,318256	2,02584	5,472314	0,094765	1,568276	1,853833	1,927128
W_{15}	0,74447	1,167571	1,278759	1,330595	1,35582	3,021589	2,50548	1,888393	23,03831	2,599236	1,898004	4,237016
W_{16}	–0,25168	0,016174	0,011759	0,069747	–0,00724	0,003014	0,28731	0,153596	0,055249	0,152151	0,198812	0,01989
W_{17}	–0,11556	0,022932	0,081564	0,06316	0,022057	8,46E–05	0,179076	0,054894	–0,51938	0,12012	0,113122	0,021679
W_{18}	–1,93721	0,023884	0,027918	3,498702	–0,59424	0,108869	11,56524	2,744688	0,42814	3,796259	170,8767	0,087494
W_{19}	0,588323	0,737227	0,782008	0,805377	0,694778	0,330952	0,252864	0,361633	0,043406	0,329608	0,437812	0,311822
W_{20}	1,343237	0,856479	0,782008	0,751543	0,737561	0,330952	0,399125	0,529551	0,043406	0,384728	0,526869	0,236015
W_{21}	–0,0982	0,009682	0,00655	0,048498	0,00224	0,003603	0,18212	0,033789	0,91627	0,108548	0,115495	0,015853
W_{22}	–0,24387	0,012554	0,00923	0,074336	–0,0068	0,003264	0,338225	0,148398	0,069319	0,137691	0,167531	0,022365
W_{23}	–0,24526	0,043108	0,031366	0,123584	0,025285	0,008354	0	0,214873	0,049432	0,170233	0,18852	0,043233
W_{24}	–0,08226	0,023975	0,013236	0,057968	0,011652	0,006337	0	0,039265	0,521631	0,108548	0,101692	0,022434
W_{25}	–1,19466	0,172065	0,086073	0,876881	0,020748	0,007107	0,614123	0,576322	0,009153	0,292716	0,682272	0,045257
W_{26}	–0,34456	0,041232	0,193278	0,134653	0,047863	0,000112	0,36278	0,3004	–0,04922	0,188381	0,209709	0,041778

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Tabela 3. Wyniki klasyfikacji przedsiębiorstw stanowiących próbę uczącą na podstawie średniej arytmetycznej poszczególnych wskaźników

Wskaźnik	BU_1	BU_2	BU_3	BU_4	BU_5	BU_6	IU_1	IU_2	IU_3	IU_4	IU_5	IU_6	Poprawność klasyfikacji dla bankrutów (%)	Poprawność klasyfikacji dla podmiotów istniejących (%)	Ogólna poprawność klasyfikacji (%)
W_1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**100,00**	**66,67**	**83,33**
W_2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**83,33**	**66,67**	**75,00**
W_3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	33,33	50,00	41,67
W_4	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	83,33	16,67	50,00
W_5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**100,00**	**66,67**	**83,33**
W_6	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**100,00**	**66,67**	**83,33**
W_7	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	50,00	50,00	50,00
W_8	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**100,00**	**50,00**	**75,00**
W_9	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	100,00	16,67	58,33
W_{10}	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**66,67**	**66,67**	**66,67**
W_{11}	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	100,00	16,67	58,33
W_{12}	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	33,33	66,67	50,00
W_{13}	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	50,00	33,33	41,67
W_{14}	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	50,00	16,67	33,33
W_{15}	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**100,00**	**33,33**	**66,67**
W_{16}	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**50,00**	**66,67**	**58,33**
W_{17}	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	66,67	16,67	41,67
W_{18}	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	100,00	16,67	58,33
W_{19}	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**83,33**	**100,00**	**91,67**
W_{20}	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**83,33**	**100,00**	**91,67**
W_{21}	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**100,00**	**50,00**	**75,00**
W_{22}	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**83,33**	**83,33**	**83,33**
W_{23}	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**83,33**	**50,00**	**66,67**
W_{24}	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**100,00**	**50,00**	**75,00**
W_{25}	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**83,33**	**66,67**	**75,00**
W_{26}	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**66,67**	**66,67**	**66,67**
Suma	**19**	**22**	**22**	**20**	**21**	**19**	**14**	**13**	**15**	**13**	**18**	**8**	**78,85**	**51,92**	**65,38**

Źródło: obliczenia własne.

w przypadku gdy empiryczna średnia wartość danego wskaźnika jest wyższa dla populacji π_1 lub jako:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_0 = \mu_1, \\ H_1: & \mu_0 > \mu_1, \end{cases}$$

gdy na podstawie wartości średniej można ocenić, że jest ona wyższa dla populacji π_0. Założeniem koniecznym dla zastosowania testu jednorodności średnich jest normalność rozkładów dla obu populacji. Niech więc populacje te mają rozkłady $N(\mu_0, \sigma_0)$ oraz odpowiednio $N(\mu_1, \sigma_1)$. W przypadku gdy odchylenia standardowe nie są znane, a badana próba ma małe rozmiary (tj. posiada nie więcej niż 122 obserwacje), do weryfikacji hipotezy zerowej można wykorzystać poniższą statystykę testową:

$$t = \frac{\overline{X}_0 - \overline{X}_1}{\sqrt{\frac{n_0 S_0^2 + n_1 S_1^2}{n_0 + n_1 - 2}\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}\right)}},$$

gdzie S_0^2 i S_1^2 oznaczają wariancje empiryczne w badanych populacjach, natomiast $\overline{X}_0$ i $\overline{X}_1$ są średnimi z próby. Warunkiem koniecznym dla zastosowania powyższej statystyki jest jednakże równość odchylenia standardowego w obu populacjach (mimo iż jest ono nieznane). Statystyka testowa ma rozkład t Studenta z n_0+n_1-2 stopniami swobody, gdzie n_0 i n_1 są liczebnościami badanych prób. Dla badanej populacji statystyka ta będzie miała rozkład $t(10)$. W przypadku równoliczności populacji, tj. $n_0=n_1=n$, przyjmuje ona postać:

$$t = \frac{\overline{X}_0 - \overline{X}_1}{\sqrt{\frac{S_0^2 + S_1^2}{n-1}}}.$$

Jak już wspomniano, dla zastosowania powyższych statystyk testowych, konieczne jest spełnienie warunku o jednorodności wariancji. Niech więc badane populacje mają rozkłady normalne $N(\mu_0, \sigma_0)$ i $N(\mu_1, \sigma_1)$ o nieznanych parametrach. Następnie z każdej z populacji wylosowano n-elementową próbę ($n=6$). Testowaniu poddaje się hipotezę o równości wariancji w obu populacjach, natomiast hipotezą alternatywną jest hipoteza mówiąca o tym, że wariancja dla jednej z populacji jest statystycznie istotnie wyższa (populacje należy ponumerować w ten sposób, aby wariancje obliczone na podstawie prób były zgodne z oznaczeniami w hipotezie alternatywnej), czyli:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_0^2 = \sigma_1^2, \\ H_1: & \sigma_0^2 > \sigma_1^2. \end{cases}$$

Test istotności, służący weryfikacji hipotezy zerowej, ma postać:

$$F = \frac{S_0^{\,2}}{S_1^{\,2}},$$

a statystyka testowa ma rozkład F Snedecora z $n_0 - 1$ i $n_1 - 1$ stopniami swobody. Dla badanych populacji otrzymuje się więc rozkład $F(5,5)$.

Wartości krytyczne dla powyższych rozkładów przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Wartości krytyczne rozkładów $t(10)$ i $F(5,5)$

Rozkład	Stopnie swobody	Kwantyl rozkładu	Wartość krytyczna
t Studenta	(10)	0,95	1,81246
		0,99	2,76377
F Snedecora	(5,5)	0,95	5,050329
		0,99	10,96702

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Na podstawie zgromadzonych obserwacji przeprowadzono test jednorodności wariancji, a następnie test istotności średnich. Wariancje w obu populacjach powinny być równe, co jest równoznaczne z przyjęciem hipotezy zerowej. Brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej w momencie, gdy wartość statystyki testowej nie przekracza wartości krytycznej dla zadanego poziomu istotności. W przypadku średnich powinny one być jak najbardziej zróżnicowane, dlatego też pożądanym efektem jest odrzucenie hipotezy zerowej, mówiącej o równości średnich w obu populacjach. Do dalszej analizy należy więc przyjąć te wskaźniki, dla których wartość statystyki F Snedecora jest niższa niż wartość krytyczna dla założonego poziomu istotności. W przypadku testu dla średnich, należy przyjąć te wskaźniki, dla których hipoteza mówiąca o ich równości zostaje odrzucona, tj. te, dla których wartość statystyki testowej przekracza wartość krytyczną.

Wyniki powyższych trzech testów zostały zestawione w tabeli 5. Pogrubioną czcionką zaznaczono wskaźniki, dla których zostały spełnione założenia co do rozróżnialności średnich w populacjach, przyjmując istotność testów na poziomie $\alpha = 0{,}05$ (co oznacza, że przy odrzucaniu hipotezy zerowej prawdopodobieństwo pomyłki wynosi 5%). Wskaźników, które osiągnęły odpowiednią wartość statystyki testowej jednocześnie i dla wariancji, i dla średniej, w analizowanym zbiorze dwudziestu sześciu wskaźników było jedynie sześć.

W tabeli 6 zestawiono natomiast zarówno wyniki powyższych testów statystycznych, jak i empirycznej trafności klasyfikacji. Mimo zwiększenia liczby koniecznych do spełnienia warunków o dodatkowe kryterium, liczba akceptowanych wskaźników nie uległa zmianie.

Tabela 5. Wyniki testu istotności średnich i jednorodności wariancji dla badanych populacji przedsiębiorstw upadłych i istniejących

*W*skaźnik	$\overline{X}_i$	$\overline{X}_{i,0}$	$\overline{X}_{i,1}$	$\sigma_{i,0}^2$	$\sigma_{i,1}^2$	Wartość statystyki *F*	Wartość statystyki *t*
W_1	**0,174**	**0,003**	**0,345**	**0,029**	**0,049**	**1,677**	**2,735**
W_2	**1,346**	**0,775**	**1,917**	**0,199**	**0,637**	**3,197**	**2,793**
W_3	66,944	65,639	68,248	1496,085	2444,235	1,634	0,093
W_4	73,036	31,151	114,921	1696,079	62418,80	36,802	0,740
W_5	0,400	0,016	0,783	0,006	0,547	85,278	2,307
W_6	0,287	–0,009	0,583	0,009	0,310	36,219	2,345
W_7	0,629	0,640	0,618	0,049	0,069	1,397	0,141
W_8	1,908	1,029	2,788	0,102	2,043	20,076	2,686
W_9	1,127	0,258	1,996	0,044	13,487	307,587	1,057
W_{10}	3,677	2,994	4,360	3,275	7,769	2,372	0,920
W_{11}	0,001	1,044	–1,043	3,495	18,699	5,351	0,991
W_{12}	–0,085	–0,311	0,141	0,292	0,228	1,281	1,403
W_{13}	1,877	1,516	2,238	1,764	3,471	1,967	0,706
W_{14}	2,143	2,128	2,157	0,311	3,151	10,140	0,035
W_{15}	3,755	1,483	6,028	0,619	70,183	113,444	1,208
W_{16}	**0,059**	**–0,026**	**0,145**	**0,013**	**0,009**	**1,373**	**2,559**
W_{17}	0,004	0,012	–0,005	0,005	0,066	13,798	0,146
W_{18}	15,886	0,188	31,583	3,230	4673,960	1447,227	1,026
W_{19}	**0,473**	**0,656**	**0,290**	**0,031**	**0,018**	**1,716**	**3,686**
W_{20}	**0,577**	**0,800**	**0,353**	**0,105**	**0,035**	**0,332**	**2,673**
W_{21}	0,112	–0,005	0,229	0,002	0,117	48,699	1,509
W_{22}	**0,061**	**–0,025**	**0,147**	**0,012**	**0,012**	**1,048**	**2,488**
W_{23}	0,054	–0,002	0,111	0,016	0,008	0,519	1,636
W_{24}	0,069	0,005	0,132	0,002	0,038	17,563	1,413
W_{25}	0,182	–0,005	0,370	0,447	0,088	5,061	1,147
W_{26}	0,094	0,012	0,176	0,035	0,024	1,473	1,499

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Kolejnym warunkiem, jaki powinny spełnić zmienne tworzące funkcję dyskryminacyjną, jest normalność ich rozkładu, co w praktyce jest bardzo rzadko spotykane. Badania jednak wykazują, że wykorzystanie danych, które nie mają rozkładu normalnego, daje równie dobre wyniki przy prognozowaniu upadłości**.** Dla analizowanych wskaźników przeprowadzono test normalności rozkładu, jednakże jego

Tabela 6. Zestawienie wyników testu istotności średnich i jednorodności wariancji oraz empirycznej trafności klasyfikacji dla badanych populacji przedsiębiorstw upadłych i istniejących

Wskaźnik	Statystyka *F*	Statystyka *t*	Poprawność klasyfikacji do populacji (%)	Poprawność klasyfikacji do populacji π_0(%)	Ogólna poprawność klasyfikacji π_1(%)
W_1	1,677	2,735	100,00	66,67	83,33
W_2	3,197	2,793	83,33	66,67	75,00
W_3	1,634	0,093	33,33	50,00	41,67
W_4	36,802	0,740	83,33	16,67	50,00
W_5	85,278	2,307	100,00	66,67	83,33
W_6	36,219	2,345	100,00	66,67	83,33
W_7	1,397	0,141	50,00	50,00	50,00
W_8	20,076	2,686	100,00	50,00	75,00
W_9	307,587	1,057	100,00	16,67	58,33
W_{10}	2,372	0,920	66,67	66,67	66,67
W_{11}	5,351	0,991	100,00	16,67	58,33
W_{12}	1,281	1,403	33,33	66,67	50,00
W_{13}	1,967	0,706	50,00	33,33	41,67
W_{14}	10,140	0,035	50,00	16,67	33,33
W_{15}	113,444	1,208	100,00	33,33	66,67
W_{16}	1,373	2,559	50,00	66,67	58,33
W_{17}	13,798	0,146	66,67	16,67	41,67
W_{18}	1447,227	1,026	100,00	16,67	58,33
W_{19}	1,716	3,686	83,33	100,00	91,67
W_{20}	0,332	2,673	83,33	100,00	91,67
W_{21}	48,699	1,509	100,00	50,00	75,00
W_{22}	1,048	2,488	83,33	83,33	83,33
W_{23}	0,519	1,636	83,33	50,00	66,67
W_{24}	17,563	1,413	100,00	50,00	75,00
W_{25}	5,061	1,147	83,33	66,67	75,00
W_{26}	1,473	1,499	66,67	66,67	66,67

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

wyniki mają jedynie charakter poglądowy i nie były uwzględniane przy doborze wskaźników wykorzystanych do konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej.

Oceny normalności rozkładu poszczególnych zmiennych dokonano na podstawie statystyki Jarque–Bera. Statystyka ta ma rozkład $\chi^2(2)$, dla której wartość krytyczna na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ wynosi 5,99146. Obliczeń dokonano za

pomocą programu Time Series Modelling, więc postać statystyki testowej nie będzie w pracy przedstawiana. Wartości statystyki Jarque–Bera dla poszczególnych zmiennych zostały przedstawione w tabeli 7.

W tabeli 7 zapis „tak" oznacza wskaźniki, dla których brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o normalności rozkładu, „nie" natomiast opisuje wskaźniki, dla których na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ odrzucono hipotezę zerową o normalności rozkładu.

Tabela 7. Wyniki testu Jarque–Bera dla rozważanych wskaźników

Wskaźnik	Wartość statystyki Jarque-Bera	Rozkład normalny
W_1	0,2338	tak
W_2	1,0952	tak
W_3	0,6824	tak
W_4	37,1745	nie
W_5	15,3947	nie
W_6	9,2220	nie
W_7	1,0058	tak
W_8	2,8423	tak
W_9	42,0265	nie
W_{10}	0,1928	tak
W_{11}	16,9017	nie
W_{12}	1,0153	tak
W_{13}	2,7512	tak
W_{14}	7,2241	nie
W_{15}	38,4681	nie
W_{16}	0,9710	tak
W_{17}	18,3890	nie
W_{18}	42,2721	nie
W_{19}	0,6182	tak
W_{20}	0,8347	tak
W_{21}	30,2964	nie
W_{22}	0,6372	tak
W_{23}	3,1447	tak
W_{24}	25,1729	nie
W_{25}	5,2061	tak
W_{26}	1,7256	tak

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Tabela 8. Wskaźniki finansowe spełniające kryterium normalności rozkładu, istotności średnich, jednorodności wariancji i poprawności klasyfikacji dla minimum 50% obiektów

Oznaczenie	Konstrukcja wskaźnika
W_1	kapitał obrotowy / aktywa ogółem
W_2	(aktywa obrotowe – zapasy) / zobowiązania krótkoterminowe
W_{16}	zysk netto / przeciętny stan aktywów ogółem
W_{19}	zobowiązania bieżące / aktywa ogółem
W_{20}	zobowiązania ogółem / aktywa ogółem
W_{22}	zysk netto / aktywa ogółem

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Podsumowując wszystkie testy przeprowadzone dotychczas, otrzymano 6 wskaźników spełniających wszystkie założone przez autorów kryteria. Ich konstrukcję przedstawiono w tabeli 8 i to od tych właśnie wskaźników rozpocznie się budowa funkcji dyskryminacyjnej.

4. Konstrukcja funkcji dyskryminacyjnej

Przyjęto następująco oznaczenia. Niech:

– π_0 oznacza populację przedsiębiorstw upadłych,

– π_1 oznacza populację przedsiębiorstw istniejących,

– wartością funkcji dyskryminacyjnej rozdzielającą populacje będzie 0; wówczas przedsiębiorstwa, dla których funkcja dyskryminacyjna przyjmie wartości ujemne, zostaną zaliczone do przedsiębiorstw w dobrej kondycji ekonomicznej, natomiast przedsiębiorstwa, dla których wartość ta będzie dodatnia, zostaną zaliczone do podmiotów zagrożonych bankructwem.

Dobór zmiennych rozpoczęto od katalogu wskaźników zawartych w tabeli 8. Macierz wariancji/kowariancji dla rozważanych zmiennych przedstawiono w tabeli 9. Można zauważyć, że zmienne W_{16} i W_{22} są ze sobą silnie skorelowane, dlatego z modelu należy usunąć jedną z nich.

Przy eliminacji jednej ze zmiennych posłużono się kryterium empirycznej trafności klasyfikacji, ponieważ wartości testu istotności średniej dla obu wskaźników były zbliżone. Jako pierwszy z modelu usunięto wskaźnik W_{16}, dla którego poprawność klasyfikacji wynosiła 83,33%. Otrzymany model zaklasyfikował poprawnie 75% przedsiębiorstw stanowiących próbę uczącą, przy czym sprawność I rodzaju wyniosła 83,33%, a sprawność II rodzaju jedynie 66,67%. Zgodnie z przyjętymi założeniami, modelu tego nie można uznać za skuteczny, dlatego

Tabela 9. Tabela współczynników korelacji dla przyjętych wskaźników finansowych

Wskaźniki	W_1	W_2	W_{16}	W_{19}	W_{20}	W_{22}
W_1	1,00	0,93	0,68	–0,50	–0,68	0,69
W_2	0,93	1,00	0,61	–0,57	–0,62	0,69
W_{16}	0,68	0,61	1,00	–0,40	–0,61	0,99
W_{19}	–0,50	–0,57	–0,40	1,00	0,77	–0,40
W_{20}	–0,68	–0,62	–0,61	0,77	1,00	–0,61
W_{22}	0,69	0,65	0,98	–0,42	–0,61	1,00

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

też nie zostanie on w artykule przedstawiony. Przeprowadzając dalszą estymację pięciowskaźnikowej funkcji dyskryminacyjnej, w otrzymanym modelu pozostawiono zmienną W_{16}, eliminując tym samym wskaźnik W_{22}. Sprawność ogólna wyniosła wówczas również 75%, także poprawność klasyfikacji bankrutów i przedsiębiorstw istniejących była identyczna.

Dokonując kolejnej modyfikacji modelu opartego na wskaźnikach optymalnych (względem przyjętych założeń), dokonywano eliminacji kolejnych zmiennych w taki sposób, aby otrzymać model czterowskaźnikowy o jak najwyższym stopniu sprawności[8]. W efekcie otrzymano dwie funkcje, dla których sprawność ogólna wyniosła 91,67%, sprawność I stopnia 83,33%, natomiast poprawność klasyfikacji przedsiębiorstw w dobrej kondycji finansowej wyniosła 100%. Na podstawie próby uczącej, oba te modele można uznać za skuteczne, dlatego zostaną one przedstawione w pracy, jednakże właściwa ocena sprawności tych, jak i kolejnych funkcji, oparta na bazie jednostek wyodrębnionych w ramach grupy testowej, zostanie przeprowadzona w kolejnym punkcie niniejszego rozdziału. Wyestymowane modele mają postać:

M1: $$Z=-1{,}875W_1+2{,}378W_{16}+0{,}09W_{19}+4{,}57W_{20}-2{,}493,$$

M2: $$Z=-1{,}974W_1+2{,}421W_{22}+0{,}247W_{19}+4{,}405W_{20}-2{,}463.$$

Trójargumentowych funkcji dyskryminacyjnych nie brano pod uwagę.

Modele M1 oraz M2 są jedynymi skutecznymi modelami (zawierającymi co najmniej cztery zmienne), opartymi na bazie wskaźników spełniających założenia określone powyżej w artykule. Aby móc kontynuować poszukiwanie bardziej skutecznego modelu, założenia te należy zweryfikować.

Wyjściową bazą do konstrukcji kolejnego modelu były wszystkie te wskaźniki, dla których poszczególne poprawności klasyfikacji były nie mniejsze niż 50%. Zbiór ten zawierał 15 zmiennych, dlatego ograniczono go nakładając kolejną restrykcję,

[8] Modele pięcioargumentowe okazały się nieskuteczne.

jaką jest zwiększenie poziomu istotności testu *t* Studenta do $\alpha = 0{,}1$. Wiąże się to z jednej strony ze zwiększeniem obszaru krytycznego, z drugiej zaś zwiększa się prawdopodobieństwo błędnych klasyfikacji. Obszar krytyczny jest to bowiem obszar o następującej własności: jeżeli wartość statystyki testowej wpada do obszaru krytycznego (dla analizowanych w niniejszej pracy testów, do obszaru krytycznego wpadają wszystkie te wartości statystyki testowej, które są większe od wartości krytycznej), to hipotezę zerową należy odrzucić i przyjąć hipotezę alternatywną. Wynik ten może być jednak obarczony błędem dla takiego procenta obserwacji, jaki ustalono poziom istotności. Zwiększając więc poziom istotności, otrzymuje się niższą wartość krytyczną, po której przekroczeniu należy odrzucić hipotezę zerową. W przypadku testu *t* Studenta zwiększa się więc liczba wskaźników spełniających założone kryterium, dla testu *F* Snedecora natomiast sytuacja jest dokładnie odwrotna. Aby wskaźnik został zaakceptowany, hipoteza zerowa nie może być odrzucona. W celu zwiększenia liczby zmiennych, należałoby „zmniejszyć" obszar krytyczny poprzez obniżenie poziomu istotności testu. Dzięki temu zmniejsza się ryzyko odrzucenia hipotezy zerowej, która jest prawdziwa, jednak tym samym zwiększa się ryzyko jej przyjęcia, mimo iż jest ona fałszywa. Nowe poziomy istotności i wyznaczone dla nich wartości krytyczne zawiera tabela 10.

Tabela 10. Wartości krytyczne testów *t* Studenta i *F* Snedecora dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}1$

Rozkład	Stopnie swobody	Poziom istotności	Kwantyl rozkładu	Wartość krytyczna
t Studenta	(10)	0,1	0,9	1,3722
F Snedecora	(5,5)	0,001	0,999	29,75

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Dzięki powyższym założeniom uzyskano 9 wskaźników finansowych, dla których ponownie przeprowadzono konstrukcję optymalnego modelu. Są to wskaźniki o indeksach 1, 2, 8, 16, 19, 20, 22, 23 oraz 26. Ich macierz wariancji/kowariancji przedstawiono w tabeli 11.

Zbiór ten jednakże znów zawiera dwie bardzo silnie skorelowane ze sobą zmienne: W_{16} oraz W_{22}. Jeden ze wskaźników należy więc wykluczyć z modelu. Sprawność ogólna modeli, jakie otrzymano po usunięciu z nich zamiennie powyższych dwu zmiennych jest identyczna i wynosi 91,67%, podobnie jak sprawności I i II rodzaju, które wynoszą odpowiednio 100% i 83,33%. Otrzymane funkcje mają postać:

M3: $$Z = 2{,}402W_1 - 2{,}156W_2 - 1{,}371W_8 - 0{,}506W_{19} + \\ -0{,}318W_{20} + 1{,}2266W_{22} - 0{,}631W_{23} - 0{,}937W_{26} + 5{,}57,$$

M4: $$Z = 2{,}096W_1 - 1{,}907W_2 - 1{,}174W_8 + 0{,}853W_{16} + \\ -0{,}513W_{19} - 0{,}315W_{20} - 0{,}736W_{23} - 0{,}508W_{26} + 4{,}907.$$

Tabela 11. Współczynniki wariancji i kowariancji dla wskaźników o indeksach 1, 2, 8, 16, 19, 20, 22, 23 oraz 26

Wskaźnik	W_1	W_2	W_8	W_{16}	W_{19}	W_{20}	W_{22}	W_{23}	W_{26}
W_1	1,00	0,93	0,67	0,68	–0,50	–0,68	0,69	0,42	0,60
W_2	0,93	1,00	0,63	0,66	–0,58	–0,62	0,69	0,27	0,54
W_8	0,67	0,63	1,00	0,35	–0,78	–0,78	0,40	0,12	0,12
W_{16}	0,68	0,66	0,35	1,00	–0,38	–0,61	0,99	0,75	0,92
W_{19}	–0,50	–0,58	–0,78	–0,38	1,00	0,77	–0,40	–0,14	–0,09
W_{20}	–0,68	–0,62	–0,78	–0,61	0,77	1,00	–0,61	–0,53	–0,42
W_{22}	0,69	0,69	0,40	0,99	–0,40	–0,61	1,00	0,67	0,90
W_{23}	0,42	0,27	0,12	0,75	–0,14	–0,53	0,67	1,00	0,75
W_{26}	0,60	0,54	0,12	0,92	–0,09	–0,42	0,90	0,75	1,00

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Model zbudowany z 8 wskaźników jest dość skomplikowany pod względem obliczeniowym. Autorom zależało wiec na maksymalnym ograniczeniu liczby wskaźników, przy zachowaniu jak najwyższego stopnia skuteczności. Oba uzyskane modele są jednakowo skuteczne, nie można więc rozstrzygnąć na tej podstawie kwestii, którą ze zmiennych, w dalszej konstrukcji, należy z modelu wykluczyć. Niezadowalające rezultaty dały też wyniki testu istotności średniej, gdyż są one do siebie bardzo zbliżone. Ostatecznie zadecydowano o wykluczeniu z modelu zmiennej W_{16}, ze względu na niższą wartość poprawnych klasyfikacji dokonanych za pomocą tego wskaźnika. Dalszych modyfikacji dokonywano więc na bazie modelu M3. Najwyższą skuteczność uzyskano dla modelu M5, który otrzymano dzięki wykluczeniu z modelu M3 zmiennej W_{23}. Przy wyborze usuwanego wskaźnika kierowano się skutecznością modeli, uzyskiwanych dzięki usuwaniu z nich kolejnych zmiennych. Wybór ten potwierdzono również wynikami testu trafności klasyfikacji do populacji przedsiębiorstw istniejących, która wynosiła $^1/_2$ oraz wartością testu istotności średnich, który dla odrzuconego wskaźnika był najniższy. Otrzymany model ma postać:

M5:
$$Z = 1{,}898W_1 - 1{,}545W_2 - 1{,}09W_8 - 0{,}449W_{19} + \\ -0{,}037W_{20} + 1{,}104W_{22} - 1{,}21W_{26} + 4{,}068.$$

Skuteczność ogólna powyższego modelu wyniosła 91,67%, sprawność pierwszego stopnia 100%, natomiast sprawność II stopnia 83,33%.

Przy eliminacji kolejnych wskaźników nie kierowano się już wskazaniami konkretnych kryteriów, sprawdzano jedynie skuteczność otrzymywanych modeli dla przedsiębiorstw stanowiących próbę uczącą. Otrzymano w ten sposób 4 modele (oznaczone przez indeksy M6-M9), które zostały przedstawione w tabeli 12. Wszystkie otrzymane funkcje posiadały sprawność ogólną na poziomie 91,67%,

Tabela 12. Wskaźniki i ich wagi wykorzystane w modelach M6-M9

Wskaźnik	M6	M7	M8	M9
α_0	3,106	2,870	3,464	4,079
W_1	1,415	1,309	1,609	1,880
W_2	–1,134	–1,181	–1,244	–1,526
W_8	–0,815	–0,685	–0,985	–1,101
W_{19}	–0,606	–0,665	–	–0,428
W_{20}	0,058	0,194	–0,229	–
W_{22}	–	0,017	1,282	1,106
W_{26}	–0,188	–	–1,441	–1,224

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

klasyfikowały poprawnie 100% jednostek upadłych i 5 z 6 jednostek istniejących. Ciekawy jest fakt, iż każdy z tych modeli popełniał błąd przy klasyfikacji tego samego przedsiębiorstwa.

Podobny algorytm postępowania zastosowano dla funkcji pięcioargumentowych i czteroargumentowych. W artykule zaprezentowane zostaną modele o skuteczności przewyższającej 90%. Poszczególne rodzaje sprawności, jakie charakteryzują przedstawione modele składające się z pięciu zmiennych są identyczne jak dla funkcji sześcioargumentowych. Współczynniki dla poszczególnych modeli przedstawiono w tabeli 13.

Tabela 13. Wskaźniki i ich wagi wykorzystane w modelach M10-M15

Wskaźnik	M10	M11	M12	M13	M14	M15
α_0	3,122	2,875	20,232	28,599	15,151	3,087
W_1	1,385	1,310	8,906	11,738	6,547	1,648
W_2	–1,102	–1,171	–6,100	–10,519	–5,778	–1,291
W_8	–0,832	–0,691	–6,015	–7,231	–3,877	–0,830
W_{19}	–0,573	–0,663	–	–5,609	–	–
W_{20}	–	0,184	–3,161	–	–1,894	–
W_{22}	–	–	–	–0,386	–0,303	1,343
W_{26}	–0,206	–	–2,819	–	–	–1,416

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

W kolejnym kroku należałoby przeprowadzić podobne symulacje dla funkcji czteroargumentowych, wykorzystując jako bazę powyższe siedem wskaźników. Niestety, mnogość kombinacji i ograniczenia sprzętowe nie pozwoliły na wykonanie stosownych obliczeń. Analiza zaprezentowanych dotychczas modeli sugeruje, że wskaźniki W_1, W_2 i W_8 występują we wszystkich z modeli M3-M15. Konstrukcję

funkcji czterowskaźnikowej rozpoczęto więc z ustalonymi trzema zmiennymi, a czwarty argument dobierano ze zbioru elementów: W_{19}, W_{20}, W_{22} i W_{26}. Otrzymane modele prezentuje tabela 14.

Tabela 14. Wskaźniki i ich wagi wykorzystane modelach M16-M19

Wskaźnik	M16	M17	M18	M19
α_0	13,974	28,457	14,982	12,298
W_1	8,986	11,506	6,482	7,010
W_2	–6,339	–10,593	–5,91	–6,261
W_8	–3,585	–7,117	–3,747	–2,677
W_{19}	–	–5,523	–	–
W_{20}	–	–	–1,734	–
W_{22}	–	–	–	0,384
W_{26}	–1,706	–	–	–

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Wszystkie z powyższych modeli osiągnęły sprawność ogólną na poziomie 91,67%, przy czym tak jak w przypadku modeli pięcio- i sześciowskaźnikowych, poprawność klasyfikacji dla grupy bankrutów wynosiła 100%, a dla przedsiębiorstw istniejących jedynie 83,33%. Również w przypadku tych funkcji, błędnie zostało zaklasyfikowane to samo przedsiębiorstwo co w przypadku modeli M3-M15: IU_4. Modele M1 i M2 błędnie zaklasyfikowały przedsiębiorstwo BU_6.

5. Ocena jakości modelu

Sprawności poszczególnych modeli zostały obliczone na podstawie próby, która była bazą dla ich stworzenia. Uzyskane wyniki są więc zawyżone. Aby uzyskać obiektywne wyniki, należy ponownie obliczyć sprawności modeli, tym razem wykorzystując jednak w tym celu próbę testową. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 15.

Najskuteczniejszy okazał się model M12. Zaklasyfikował on poprawnie 83,33% jednostek. Macierz klasyfikacji dla modelu M12 przedstawia tabela 16.

Na bazie tabeli 16 obliczono współczynniki empirycznej trafności klasyfikacji[9]. Otrzymane wyniki umieszczono w tabeli 17.

[9] D. Hadasik, *Upadłość przedsiębiorstw w Polsce i metody jej prognozowania,* Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1998, s. 123-124.

Tabela 15. Skuteczność poszczególnych modeli (%)

Model	Sprawność ogólna	Sprawność I stopnia	Sprawność II stopnia
M1	66,67	50,00	83,33
M2	58,33	50,00	66,67
M3	66,67	66,67	66,67
M4	66,67	66,67	66,67
M5	66,67	66,67	66,67
M6	75,00	83,33	66,67
M7	66,67	66,67	66,67
M8	66,67	66,67	66,67
M9	66,67	66,67	66,67
M10	75,00	83,33	66,67
M11	66,67	66,67	66,67
M12	**83,33**	**100,00**	**66,67**
M13	66,67	66,67	66,67
M14	66,67	66,67	66,67
M15	66,67	66,67	66,67
M16	75,00	83,33	66,67
M17	66,67	66,67	66,67
M18	66,67	66,67	66,67
M19	66,67	66,67	66,67

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Tabela 16. Macierz poprawności klasyfikacji dla modelu M12

Rzeczywista przynależność do populacji	Populacja wskazana przez funkcję dyskryminacyjną		Liczebność próby z danej populacji
	π_0	π_1	
π_0	6	0	6
π_1	2	4	6

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Tabela 17. Empiryczne wskaźniki trafności klasyfikacji dla modelu M12

Wyszczególnienie	Wskaźniki trafnych klasyfikacji	Wskaźniki błędnych klasyfikacji
Wskaźniki globalne	$W^T = 0,83$	$W^B = 0,17$
Wskaźniki indywidualne	$W_0^T = 1$	$W_{0/1}^B = 0$
	$W_1^T = 0,67$	$W_{1/0}^B = 0,33$

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Ostatnim etapem oceny dopasowania modelu jest weryfikacja hipotezy dotyczącej istotności wskaźnika W^T. Testowana jest więc hipoteza:

$$\begin{cases} H_0: & P = P_{\min}, \\ H_1: & P > P_{\min}. \end{cases}$$

Oszacowaniem prawdopodobieństwa P jest współczynnik W^T, $P_{\min}$ natomiast niech wynosi $^1/_2$, co jest równe prawdopodobieństwu poprawnej klasyfikacji przy losowym przypisywaniu obiektów do poszczególnych populacji. Wówczas wartość statystyki t Studenta wynosi:

$$t = \frac{W^T - P_{\min}}{\sigma_P} = 2,31.$$

Statystyka ta ma rozkład $t(10)$. Przyjmując istotność testu na poziomie $\alpha = 0,05$, wartość krytyczna dla danego rozkładu wynosi 1,81246. Wartość statystyki testowej jest więc większa od wartości krytycznej, co skutkuje tym, iż należy odrzucić hipotezę zerową mówiącą o równości prawdopodobieństw: losowej klasyfikacji przedsiębiorstw i klasyfikacji za pomocą modelu M12. W jej miejsce należy przyjąć hipotezę alternatywną, mówiącą o tym, iż prawdopodobieństwo poprawnej klasyfikacji podmiotu za pomocą otrzymanego modelu jest statystycznie istotnie wyższe niż dla losowego przypisywania obiektów.

Dodatkowo, przekształcając powyższe wzory, otrzymuje się minimalną wartość współczynnika W^T – 0,76, która świadczy o tym, że wyniki otrzymane za pomocą funkcji dyskryminacyjnej są statystycznie istotnie lepsze niż dla losowego doboru przydzielania przedsiębiorstw. Żaden z pozostałych modeli nie spełnia więc tego warunku.

Statystyczną istotność wskaźnika W^T potwierdzono również przeprowadzając test Q-Pressa. Wartość statystyki testowej wyniosła:

$$Q = \frac{[N - 2n]^2}{N} = 5,33.$$

Statystyka ta ma rozkład $\chi^2(1)$, dla którego wartość krytyczna przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ wynosi 0,00393. Podobnie jak w przypadku statystyki t Studenta, jej wartość wskazuje na odrzucenie hipotezy zerowej i przyjęcie hipotezy alternatywnej.

Następnie zbadano, czy modyfikując prawdopodobieństwa *a priori* przynależności przedsiębiorstw do populacji, a tym samym przesuwając wartość graniczną klasyfikacji, można uzyskać dla dowolnego z modeli M1-M19 większą skuteczność niż dla modelu M12. Niestety, największą skutecznością, jaką udało się uzyskać, było 83,33%, dlatego też wyniki te nie zostaną w artykule uwzględnione.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że dla 19 analizowanych funkcji 3 przedsiębiorstwa upadłe i 3 istniejące zostały prawidłowo zaklasyfikowane przez wszystkie modele. Dla czterech obiektów wyniki te były jednak bardzo niskie. Liczby poprawnych klasyfikacji poszczególnych przedsiębiorstw przedstawia tabela 18.

Tabela 18. Liczba poprawnych klasyfikacji dokonanych przez modele M1-M19 dla poszczególnych przedsiębiorstw

BT_1	BT_2	BT_3	BT_4	BT_5	BT_6
19	19	1	4	19	17
IT_1	IT_2	IT_3	IT_4	IT_5	IT_6
19	18	19	0	2	19

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Może to świadczyć o niskiej skuteczności modelu lub o tym, że przedsiębiorstwa te, mimo iż nadal istnieją, przechodziły w tym okresie kryzys lub mimo iż przedsiębiorstwa upadły, to czynnik, który przyczynił się do ich bankructwa wystąpił w okresie pomiędzy ogłoszeniem ostatniego sprawozdania a datą wydania przez sąd postanowienia o upadłości.

Ostatnim etapem prowadzonej analizy było sprawdzenie stopnia poprawności klasyfikacji dokonywanych przez model na dwa lata (lub w niektórych przypadkach dwa i pół roku) przed ogłoszeniem upadłości. Otrzymane wyniki oraz poszczególne poziomy sprawności dla analizy na rok i dwa lata przed upadłością przedstawiono w tabeli 19.

Tabela 19. Poprawność klasyfikacji, sprawność I i II rodzaju oraz sprawność ogólna

Czas przed upadłością	BT_1	BT_2	BT_3	BT_4	BT_5	BT_6	IT_1	IT_2	IT_3	IT_4	IT_5	IT_6	Sprawność I stopnia (%)	Sprawność II stopnia (%)	Sprawność ogólna (%)
1 rok	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	100,00	66,67	83,33
2 lata	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	66,67	83,33	75,00

Przez „1" oznaczono przedsiębiorstwa, które zostały poprawnie zaklasyfikowane przez model M12; „0" oznacza przedsiębiorstwa, które zaklasyfikowano błędnie.

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Na podstawie tabeli 19 można zauważyć, że sprawność ogólna modelu na dwa lata przed upadłością wynosi 75%. Dla tego okresu model zaklasyfikował błędnie tylko o jedno przedsiębiorstwo więcej niż na rok przed upadłością. Zmieniła się jednakże struktura poszczególnych klasyfikacji. Poprawność klasyfikacji na rok przed upadłością dla grupy bankrutów wynosiła 100% i spadła do 66,67% przy wydłużeniu okresu prognozy. Poprawie uległa natomiast poprawność klasyfikacji dla grupy przedsiębiorstw istniejących, która teraz wyniosła 83,33%.

Podsumowanie

Celem niniejszego artykułu było stworzenie skutecznego modelu dyskryminacyjnego, pozwalającego na przewidzenie upadłości przedsiębiorstw z odpowiednio dużym wyprzedzeniem czasowym. Próbę badawczą stanowiły 24 podmioty sektora budowlanego, a dane finansowe wykorzystane do budowy modelu pochodziły z lat 2010-2011.

Przy konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej wzięto pod uwagę 26 wskaźników finansowych występujących w modelach charakteryzujących się wysokim stopniem skuteczności. Żaden ze wskaźników nie pozwolił na poprawne zaklasyfikowanie wszystkich analizowanych obiektów, jednakże dwa z nich poprawnie zaklasyfikowały aż 91,67% badanych przedsiębiorstw. Opierając się na powyższym kryterium, teście istotności średnich dla wskaźników w poszczególnych populacjach oraz skuteczności, jaką osiągał model po usunięciu z niego określonej zmiennej, wyznaczono 19 funkcji dyskryminacyjnych, których sprawność ogólna mierzona na podstawie próby uczącej wyniosła 91,67%. Dla 17 z powyższych modeli sprawność I rodzaju (najistotniejsza ze względu na przewidywanie zagrożenia upadłością) wyniosła 100%.

Analizując skuteczność modeli na podstawie próby walidacyjnej, dla wszystkich funkcji otrzymano sprawność ogólną na poziomie wyższym niż można uzyskać podczas losowej klasyfikacji podmiotów. Dla dwóch modeli otrzymano jednakże sprawność I stopnia na poziomie 50%, co jest wynikiem niezadowalającym, równoważnym przypadkowemu przydzielaniu jednostek. Największą sprawność ogólną (na poziomie 83,33%) osiągnął pięciowskaźnikowy model M12. Co najważniejsze, umożliwił on poprawną klasyfikację wszystkich podmiotów, co do których w ciągu ostatnich 18 miesięcy została ogłoszona upadłość. Skuteczność tego modelu na dwa lata przed upadłością wyniosła 75%. Niestety, znacznemu pogorszeniu w stosunku do prognozy na rok wstecz, uległa poprawność klasyfikacji dla grupy bankrutów, która spadła do poziomu 66,67%; tym samym jednak wzrosła liczba poprawnych klasyfikacji dla podmiotów istniejących.

Powyższe rozważania oraz fakt, iż średnia poprawność klasyfikacji przedsiębiorstw pochodzących z grupy uczącej, obliczona na podstawie wszystkich 26 wskaźników na rok przed upadłością wyniosła blisko 80% dla przedsiębiorstw upadłych i nieco ponad 50% dla podmiotów istniejących, skłaniają do wyciągnięcia następujących wniosków:

1) na podstawie wysokiej poprawności klasyfikacji bankrutów na rok przed upadłością (wynoszącej 100% dla otrzymanej funkcji dyskryminacyjnej oraz 78,85% na podstawie wartości wskaźników finansowych) oraz niskiej

skuteczności tych przewidywań dla podmiotów istniejących, można podejrzewać, że duży wpływ na wyniki miał kryzys, który w latach 2010-2012 dotknął branżę budowlaną; efektem ogólnego kryzysu mogło być pogorszenie wyników finansowych podmiotów, które mimo iż do końca okresu objętego analizą zachowały wypłacalność, to w badanym roku mogły przechodzić trudności finansowe i model zaklasyfikował je do grupy podmiotów zagrożonych bankructwem;

2) wyższa sprawność II rodzaju w przypadku prognozy na 2 lata przed upadłością wskazuje również na powiązania ze wspomnianym kryzysem; wobec błędnie zaklasyfikowanych bankrutów upadłość została ogłoszona w pierwszej połowie 2012 r., natomiast wykorzystane dane finansowe pochodziły z roku 2009, kiedy to załamanie w branży budowlanej nie było jeszcze wyraźnie widoczne.

Na niską skuteczność modeli mają więc znaczny wpływ czynniki zewnętrzne, które nie znalazły odbicia w sprawozdaniach jednostek. Nie bez znaczenia pozostaje również fakt, iż podmioty, a zwłaszcza te, które przechodzą trudności, niechętnie publikują swoje wyniki finansowe. Próba badawcza była więc stanowczo zbyt mała, aby posłużyć do konstrukcji wysokiej jakości modelu. W związku z tym otrzymane wyniki obarczone są dużym ryzykiem błędu, a w przypadku sprawności I lub II rodzaju błędna klasyfikacja dokonana wobec jednego tylko podmiotu pogarsza sprawność danego typu o około 17%, natomiast sprawność ogólną o około 8%.

Literatura

Antonowicz P., *Metody oceny i prognoza kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw*, Ośrodek Doradztwa i Doskonalenia Kadr, Gdańsk 2007.

Hadasik D., *Upadłość przedsiębiorstw w Polsce i metody jej prognozowania,* Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1998.

Hołda A., *Kontynuacja działalności jednostki i modele ostrzegające przed upadłością*, Wyd. KiBR, Warszawa 2007.

Karol T., *Systemy ostrzegania przed ryzykiem upadłości*, Wolters Kluwer, Warszawa 2010.

Stefański A., *Analiza dyskryminacyjna na przykładzie wybranych modeli polskich i zagranicznych,* w: *Rozwój lokalny i regionalny. Innowacyjność i rozwój przedsiębiorczości*, red. M. Dylewski, „Zeszyty Naukowe WSB w Poznaniu" 2010, nr 27.

www.coface.pl [23.09.2013].

Zaleska M., *Identyfikacja ryzyka upadłości przedsiębiorstwa i banku. Systemy wczesnego ostrzegania*, Difin, Warszawa 2002.

The methodology of building a model of bankruptcy prediction based on the example of the construction sector

Summary. The aim of the study is to create efficient discriminant model that can predict bankruptcy of construction companies. The study was conducted on 24 firms from the construction sector, financial data were for the period 2010-2011, and 26 financial ratios were taken into account. The highest efficiency in total (on the level of 83,33%) reached M12 model. The research results allow to make the conclusion, taking into account high efficiency in classifying bankrupts and low efficiency in classifying non-bankrupts, that financial crisis from last years had a strong influence on the firms' performance and on the study results as well. Important factor could also be that firms, especially with financial problems, are unwilling to publish their financial data.

Key words: discriminant analysis, bankruptcy, construction sector