Zeszyty Naukowe
Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu
Nr 7(45)/2014

Paweł Kufel

Wyższa Szkoła Bankowa w Toruniu

Filtracja procesów a parametry współzależności procesów na przykładzie modelowania inflacji w Polsce

Streszczenie. Celem przeprowadzonego badania jest wykorzystanie wybranych filtrów do modelowania zjawisk makroekonomicznych. W artykule przedstawiono własności i charakterystyki filtrów Hodricka–Prescotta, Baxter–Kinga, Butherworda oraz Christiano–Fitzgeralda. Została postawiona hipoteza badawcza, że rodzaj wybranego filtru nie wpływa istotnie na wyniki otrzymanych modeli oraz własności procesów resztowych. Porównanie dotyczy wartości ocen parametrów strukturalnych oraz testów związanych z procesem resztowym.

Słowa kluczowe: modelowanie zgodne, inflacja, filtr Hodricka–Prescotta, Baxter–Kinga, Butherworda oraz Christiano–Fitzgeralda

Wstęp

Bardzo często procesy ekonomiczne poddawane są różnego rodzaju przekształceniom i transformacjom. W głównej mierze ma to na celu eliminację pewnych własności z badanych procesów lub ich wzmocnienie. Do najczęściej wykorzystywanych przekształceń w modelowaniu zjawisk makroekonomicznych należy logarytmowanie, które pozwala na budowę modeli multiplikatywnych. Równie często spotykaną transformacją procesów ekonomicznych jest wyznaczanie pierwszych różnic, stosowane w przypadku procesów zintegrowanych,

czyli występowania pierwiastków jednostkowych w procesach. W sytuacji danych o częstotliwości większej niż roczna – dane o charakterze kwartalnym lub miesięcznym bywa również konieczne wyeliminowanie sezonowych pierwiastków jednostkowych poprzez różnicowanie sezonowe.

Szeroką grupę transformacji rzeczywistych procesów ekonomicznych stanowi filtrowanie. W ekonometrii znanych jest bardzo wiele filtrów zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstości. Najbardziej powszechnie wykorzystywane są filtry Hodricka–Prescotta, Baxter–Kinga, Butherworda oraz Christiano–Fitzgeralda. Należy również mieć na uwadze, iż wyznaczanie pierwszych różnic jest także swoistym filtrem o określonych własnościach.

Bardzo często badacze wykorzystują pewien filtr o określonych parametrach, wspierając się przy tym własnym doświadczeniem, doświadczeniem innych badaczy, studiami literaturowymi. Artykuł ma na celu porównanie wybranych metod filtracji składnika długookresowego i ich wpływu na parametry współzależności zjawisk ekonomicznych. Dysponując szeroką gamą różnych filtrów, należy postawić następujące pytania badawcze:

1. Czy wykorzystanie różnych filtrów do filtracji procesów wpływa na uzyskiwane oceny parametrów strukturalnych estymowanych modeli?
2. Czy wykorzystywane w modelowaniu zjawisk ekonomicznych filtry, z uwagi na różne podejście (chociażby w kwestii dziedziny – czasu lub częstości), charakter, a co za tym idzie funkcje transferowe, wpływają istotnie na wyniki przeprowadzonych badań?

Na podstawie tych pytań stawiana jest następująca hipoteza badawcza:

Wykorzystanie wybranych filtrów dolnoprzepustowych nie wpływa istotnie na uzyskiwane oceny parametrów strukturalnych i własności składnika losowego.

Ta hipoteza zostanie zweryfikowana na podstawie wyników przeprowadzonego badania. Wykorzystując ideę dynamicznego modelowania zgodnego, zostały oszacowane modele inflacji dla Polski w okresie od stycznia 2000 do lipca 2011 r., które będą się charakteryzować identycznym zestawem procesów wykorzystanych w modelowaniu, o tej samej postaci funkcyjnej modelu, o wspólnej strukturze trendowo-autoregresyjnej, a różnica będzie występować jedynie przy wykorzystaniu wybranych filtrów i parametrów do filtracji procesów wykorzystanych w badaniu. Następnie zostaną porównane wartości ocen parametrów strukturalnych oraz własności procesów resztowych.

1. Wykorzystane metody badawcze

1.1. Koncepcja dynamicznego modelowania zgodnego

Idea modelowania zgodnego została przedstawiona w pracy Z. Zielińskiego i L. Talagi[1]. Szczegółowe opracowania można również znaleźć w pracach Z. Zielińskiego[2], T. Kufla (2002)[3] i P. Kufla[4].

Idea zgodności powstała na gruncie analizy spektralnej i rozpatrywania funkcji gęstości procesów na osi częstości, a nie na osi czasu. Model traktuje się jako zgodny, gdy obie strony równania (modelu) są zgodne w sensie przedstawienia spektralnego (częstościowego). Model jest zgodny, gdy są zgodne jego harmoniczne struktury, co oznacza, że funkcja gęstości spektralnej procesu objaśnianego jest równa lub równoległa w osi częstości łącznej funkcji gęstości procesów objaśnianych oraz procesu resztowego. Punktem wyjścia modelowania zgodnego jest fakt, iż model, w którym wykorzystuje się zmienne będące wyłącznie białymi szumami, jest zawsze zgodny, tzn.

$$\varepsilon_{y_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{x_{1,t}} + \alpha_2 \varepsilon_{x_{2,t}} + \ldots + \alpha_k \varepsilon_{x_{k,t}} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

gdzie $\varepsilon_{y_t}, \varepsilon_{x_{1,t}}, \varepsilon_{x_{2,t}}, \ldots, \varepsilon_{x_{k,t}}, \varepsilon_t$ są procesami o własnościach białego szumu. W koncepcji modelowania zgodnego zakłada się przedstawienie rzeczywistego procesu w postaci trendowo-sezonowo-autoregresyjnej.

1.2. Wybrane metody filtracji

Filtr Hoddricka–Prescota zaprezentowany przez Hodricka i Prescotta[5] jest filtrem dolnoprzepustowym, działającym w dziedzinie częstości. Filtr ten dekomponuje proces na dwa składniki – krótko- i długookresowy:

$$y_t = g_t + c_t$$

dla $t = 1, 2, \ldots, T$, gdzie y_t jest dekomponowanym procesem, g_t – składnikiem długookresowym (trendowym), a c_t – składnikiem krótkookresowym (cyklicznym).

---

[1] Z. Zieliński, L. Talaga, *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa 1986.

[2] Z. Zieliński, *Zgodne, liniowe, dynamiczne modele ekonometryczne pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego rodzaju*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Ekonomia" 1990, nr 15, s. 43-80.

[3] T. Kufel, *Postulat zgodności w dynamicznych modelach ekonometrycznych*, Wyd. UMK, Toruń 2002.

[4] P. Kufel, *Zgodny dynamiczy model ekonometryczny jako predyktor zależności nieliniowych*, TNOiK, Toruń 2013.

[5] R.J. Hodrick, E.C. Prescott, *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, „Journal of Money Credit and Banking" 1997, t. 29, nr 1, s. 1-16.

Dekompozycja odbywa się poprzez estymację składnika długookresowego g_t, minimalizując następującą funkcję:

$$\min\left[\sum_{t=1}^{T}(y_t - g_t)^2 + \lambda\sum_{t=3}^{T}\left((g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})\right)^2\right],$$

gdzie λ jest parametrem wygładzania. Sugerowana przez autorów filtra wartość parametru wygładzania uzależniona jest od częstotliwości danych i dla danych kwartalnych wynosi λ = 1600, a dla danych miesięcznych λ = 14 400. Istnieje zależność między wartością parametru λ a kątem odcięcia ω:

$$\lambda = \frac{1}{4\cdot\left(\cos(\omega)^2\right)},$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{m}$, a m jest liczbą obserwacji w próbie. Można łatwo obliczyć wartość parametru λ dla zadanego kąta odcięcia lub filtrowanej długości cyklu. Dodatkowo należy wskazać, iż filtr HP nie wprowadza przesunięcia w fazie oraz jest filtrem symetrycznym.

Filtr Buttherwotha określany jest za pomocą dwóch parametrów – kąta odcięcia oraz rzędu wielomianu wygładzania. W przypadku gdy rząd wielomianu jest równy 2, wówczas filtr Butterwortha w wersji zaproponowanej w pracy Pollocka[6] jest identyczny z filtrem Hodricka–Prescotta. Wyższe stopnie wielomianu prowadzą do uzyskiwania funkcji wzmocnienia bliskich funkcji wzmocnienia dla filtru idealnego, szczególnie dla środkowych obserwacji. Ostatnie obserwacje w próbie cechuje pewne odchylenie do funkcji transferowej.

Przedstawione filtry określone są w dziedzinie częstości. Filtr Baxter–Kinga określony jest w dziedzinie czasu z parametrem opóźnień i wyprzedzeń k. Filtracja procesu za pomocą tego filtru powoduje ucięcie próby o $2k$ obserwacji – k na początku próby i k na końcu. Z tego powodu filtr ten nie może być wykorzystany do porównania w przeprowadzonym badaniu.

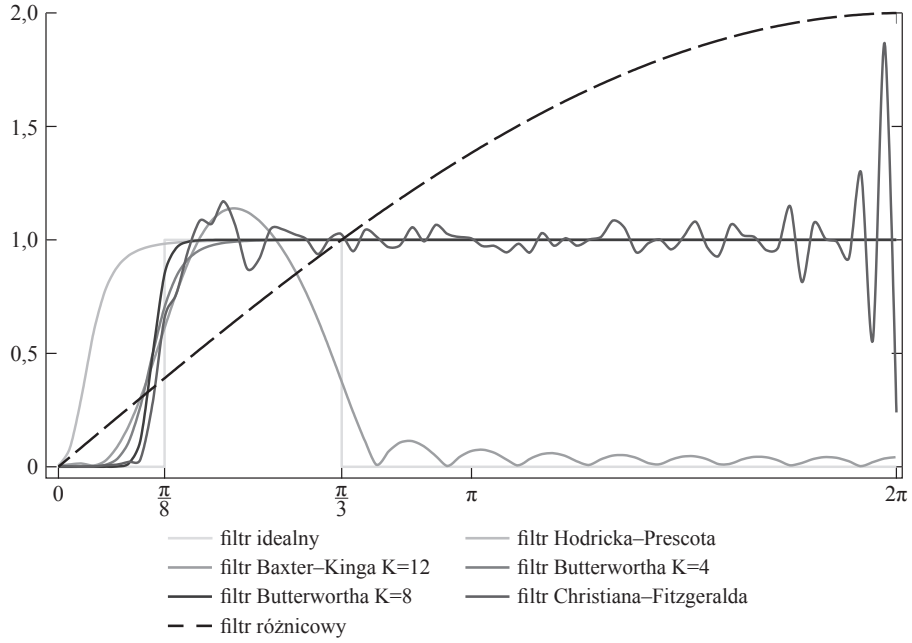
Kolejny filtr wykorzystywany w ekonometrii został zaproponowany przez Christiano i Fitzgeralda[7]. Charakteryzuje się on brakiem symetryczności oraz powoduje przesunięcie w fazie. Dodatkowo występuje możliwość wzmacniania wysokich częstotliwości.

Rysunek 1 przedstawia funkcje wzmocnienia dla filtrów: idealnego, Hodricka–Prescotta, Buttherwortha, Baxter–Kinga, Christiano–Fitzgeralda oraz różnicowego.

---

[6] D.S.G. Pollock, *Trend estimation and de-trending via rational square-wave filters*, „Journal of Econometrics" 2000, nr 99, s. 317-334.

[7] L. Christiano, T.J. Fitzgerald, *The bandpass filter*, „International Economic Review" 2003, nr 44(2), s. 435-465.



Rys. 1. Funkcje wzmocnienia wybranych filtrów

Przykłady zastosowania oraz wnioski z badań dotyczących filtrów omawiają w swoich pracach[8]: Bergman, Gächter, Riedl, Ritzberger-Grünwald, Inklaar, De Haan, Eickmeier, Breitung, Estrella, Stock, Watson, Zarnowitz, Ozyildirim.

2. Przebieg i wyniki badania

W badaniu wykorzystano makroekonomiczne dane empiryczne dla Polski, obejmujące okres od stycznia 2000 do lipca 2011 r. (139 obserwacji). Zmienną

[8] M.U. Bergman, *How similar are European business cycles?*, w: *Growth and Cycle in the Eurozone*, red. G.L. Mazzi, G. Savio, Basingstoke, Hampshire, UK: Palgrave MacMillan 2007; M. Gächter, A. Riedl, D. Ritzberger-Grünwald, *Business Cycle Synchronization in the Euro Area and the Impact of the Financial Crisis*, „Monetary Policy and The Economy" 2012, Q2/12, s. 33-60; R. Inklaar, J. De Haan, *Is there really a European business cycle? A comment*, „Oxford Economic Review" 2001, nr 53 , s. 215-220; S. Eickmeier, J. Breitung, *How Synchronized are New EU Member States with the Euro Area? Evidence from a Structural Factor Model*, „Journal of Comparative Economics" 2006, t. 34, nr 3, s. 538-563; A. Estrella, *Extracting Business Cycle Fluctuations: What Do Time Series Filters Really Do?*, Staff Report No. 289, Federal Reserve Bank of New York, 2007; J.H. Stock, M.W. Watson, *Understanding changes in international business cycle dynamics*, „Journal of the European Economic Association" 2005, nr 3(5), s. 966-1006; V. Zarnowitz, A. Ozyildirim, *Time Series Decomposition and Measurement of Business Cycles, Trends and Growth Cycles*, NBER Working Paper 8736, 2002.

objaśnianą modelu jest inflacja (INFL), jako wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych, zmiennymi objaśniającymi natomiast są:

– stopa bezrobocia rejestrowanego (BEZR),

– ceny transakcyjne importu (IMPP),

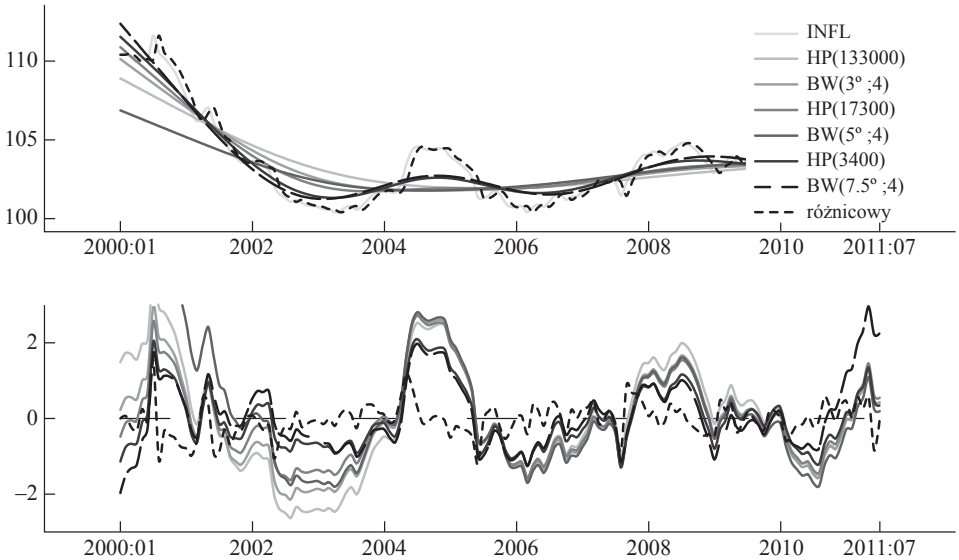
– podaż pieniądza M1 (M1),

– przeciętne miesięczne nominalne wynagrodzenie brutto w sektorze przedsiębiorstw (WNG).

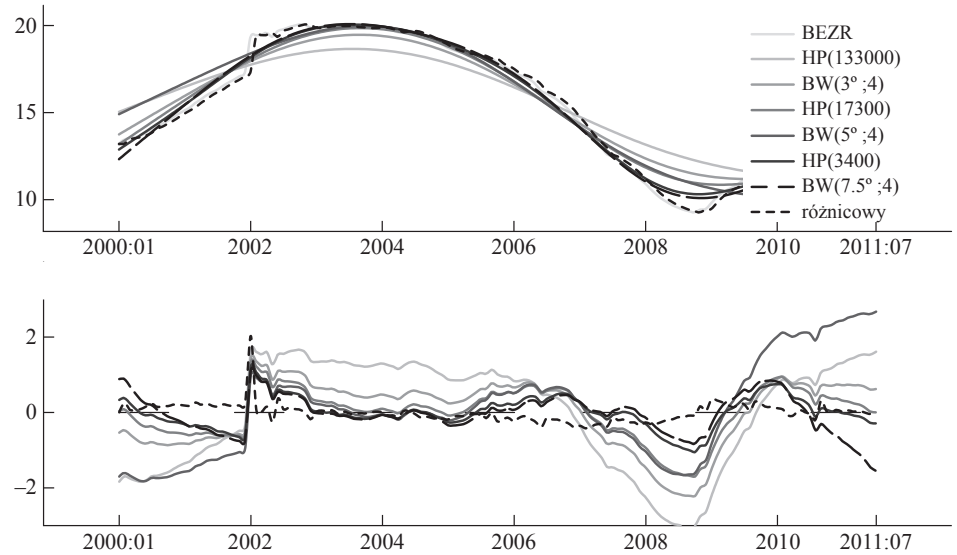
Wszystkie zmienne zostały oczyszczone za pomocą procedury X-12-ARIMA, a następnie wszystkie procesy zostały przefiltrowane z zależności o okresach 4, 6 i 10 lat. Dla filtru Hodricka–Prescota oznacza to wykorzystanie parametru wygładzania odpowiednio $\lambda = \{133000, 17300, 3400\}$, natomiast w przypadku filtru Buttherwortha wykorzystane zostały parametry $(\omega, n) = \{(3^o, 4), (5^o, 4), (7, 5^o, 4)\}$.

Rzeczywiste procesy wraz z przedstawionymi składnikami trendowymi dla przefiltrowanych procesów dla poszczególnych zjawisk ekonomicznych oraz składniki cykliczne przedstawione są na rysunkach 2-6.

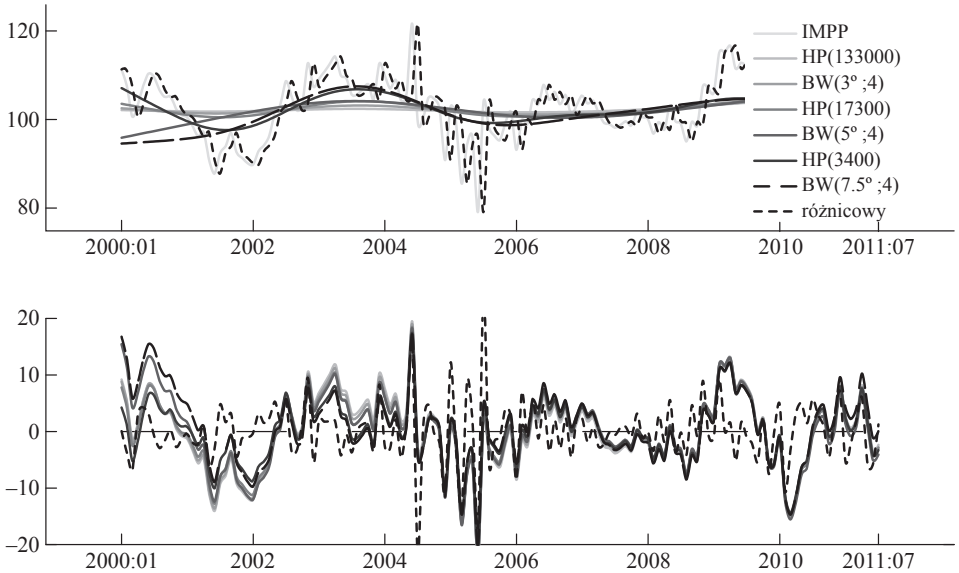
Po oszacowaniu poszczególnych modeli, które różniły się wykorzystanym filtrem, a zestaw zmiennych był identyczny dla wszystkich modeli, została przeprowadzona eliminacja *a posteriori* dla poziomu istotności $\alpha = 5\%$. Oceny parametrów strukturalnych dla poszczególnych modeli empirycznych zostały przedstawione w tabeli 1. Ponadto przedstawiono następujące własności procesów resztowych poszczególnych modeli: przez S_e zostały oznaczone wartości błędu standardowego reszt, p_{White} oznacza wartość empirycznego poziomu istotności dla



Rys. 2. Inflacja wraz ze składnikiem trendowym oraz cyklicznym

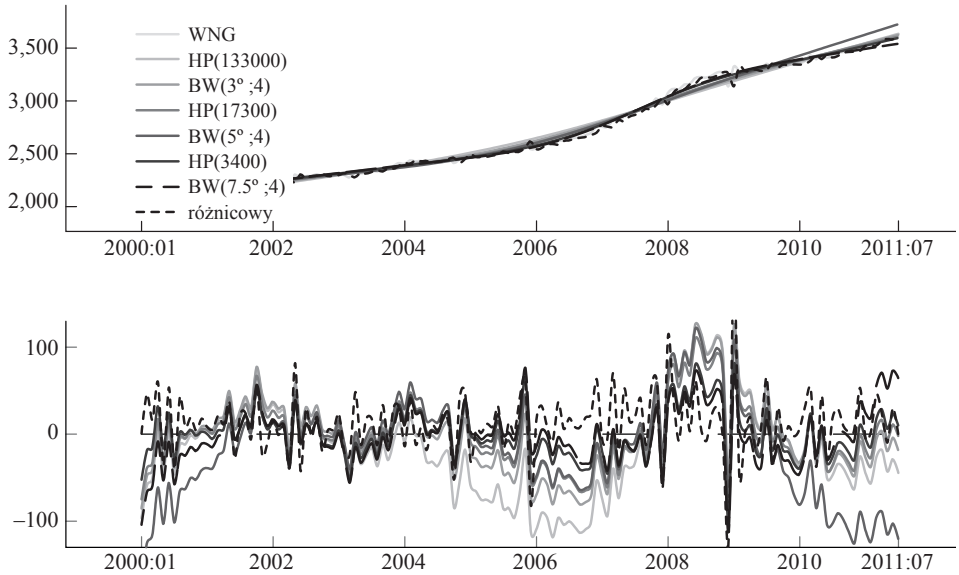


Rys. 3. Stopa bezrobocia wraz ze składnikiem trendowym oraz cyklicznym

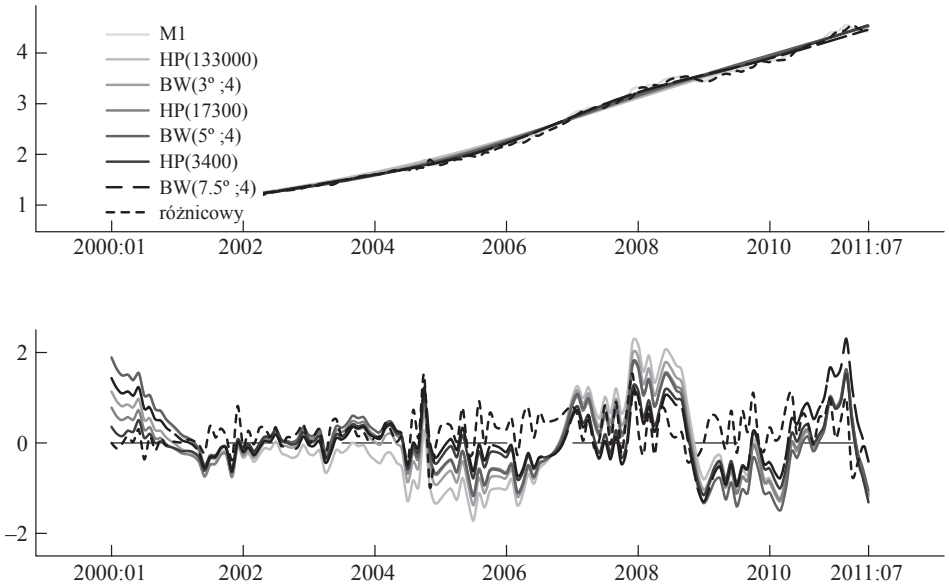


Rys. 4. Ceny transakcyjne importu wraz ze składnikiem trendowym oraz cyklicznym

testu White'a, p_{LB12} jest wartością empirycznego poziomu istotności testu Ljiunga–Boxa dla opóźnienia do 12 rzędu, natomiast p_{ADF} oznacza poziom empirycznej istotności dla testu ADF, którego hipoteza zerowa mówi o występowaniu pierwiastka jednostkowego.



Rys. 5. Wynagrodzenie wraz ze składnikiem trendowym oraz cyklicznym



Rys. 6. Podaż pieniądza wraz ze składnikiem trendowym oraz cyklicznym

Tabela 1. Wartości ocen parametrów modeli oraz wartości *p* wybranych testów

	BW10	BW6	BW	HP10	HP6	HP4	diff
const	0,0030	–0,0183	0,0091	0,0055	0,0020	–0,0020	–0,0215
$INFL_{t-1}$	1,1944	1,1982	1,0951	1,2152	1,1599	1,1287	0,3887
$INFL_{t-2}$	–0,2546	–0,2635	–0,2687	–0,2622	–0,2479	–0,3070	
$INFL_{t-12}$			–0,2578				
$INFL_{t-13}$			0,1978				
$BEZR_t$	0,3362	0,3460		0,3274	0,1811		
$BEZR_{t-1}$	–0,3075	–0,3256	–0,1596	–0,3206			
$BEZR_{t-4}$					–0,4636		–0,3792
$BEZR_{t-5}$					0,2819		
$IMPP_t$	0,0157	0,0170	0,0170	0,0170	0,0144	0,0102	0,0161
$IMPP_{t-1}$							0,0115
$IMPP_{t-5}$						0,0108	0,0103
$IMPP_{t-9}$					0,0110		0,0120
$IMPP_{t-11}$	0,0102	0,0104		0,0101			
WNG_{t-1}						0,0023	
WNG_{t-2}				–0,0012			
$M1_t \cdot 10^{-4}$	0,149	0,159		0,141	0,161	0,118	
S_e	0,3337	0,3323	0,3062	0,3352	0,3261	0,3212	0,351216
p_{White}	0,0825	0,1062	0,2679	0,2257	0,33772	0,4466	0,06172
p_{LB12}	0,161	0,135	0,922	0,085	0,354	0,62	0,694
p_{ADF}	0,0256	0,02977	<0,0001	0,0174	0,014	0,0041	0,0103

Wnioski z przeprowadzonego badania

Przeprowadzone badanie pozwoliło na weryfikację postawionej hipotezy badawczej, która nie została odrzucona – rodzaj wykorzystanego filtru nie wpływa istotnie na wartości ocen parametrów. Zauważalna różnica występuje dla modelu po zastosowaniu filtru różnicowego. Różni się on od pozostałych w kontekście istotności parametrów strukturalnych zmiennych, które pozostały w modelu. Dla wszystkich modeli wartości błędu standardowego reszt są zbliżone. Na poziomie istotności $\alpha = 5\%$ dla wszystkich modeli brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej dla testu White'a, co oznacza brak heteroskedatyczności procesów resztowych. Podobne wnioski uzyskuje się w przypadku testu Lijunga–Boxa

badającego autokorelacje do 12 rzędu – nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, czyli nie występuje istotna autokorelacja procesu resztowego do rzędu 12. Test pierwiastka jednostkowego testu ADF wskazuje, że na poziomie $\alpha = 5\%$ procesy resztowe nie są zintegrowane. Powyższe testy stwierdzają odpowiednie własności procesów resztowych, które można uznać za białe szumy.

Przeprowadzone badanie pozwoliło na weryfikację postawionej hipotezy badawczej i nie ma podstaw do jej odrzucenia. Nie występują istotne różnice między własnościami modeli, oszacowanymi dla zmiennych, które zostały przefiltrowane za pomocą filtrów Hodricka–Prescota oraz Buttherwortha dla różnych parametrów. Wystąpiły pewne różnice (w ocenach parametrów strukturalnych) w stosunku do filtru różnicowego, jednakże i tutaj własności procesu resztowego są odpowiednie. Może to wynikać z odpowiedniego doboru zmiennych objaśniających do modelu, ich prawidłowego przefiltrowania lub z własności modelowania zgodnego, które zapewnia procesy resztowe o własnościach białego szumu.

Przeprowadzone badanie nie wyczerpuje badanego tematu, weryfikacja postawionej hipotezy badawczej powinna zostać przeprowadzona również na większej liczbie danych empirycznych oraz dla danych symulacyjnych.

Literatura

Baxter M., King R.G., *Measuring business cycles: Approximate bandpass filters*, „The Review of Economics and Statistics", 1999, nr 81(4).

Bergman M.U., *How similar are European business cycles?*, w: *Growth and Cycle in the Eurozone*, red. G.L. Mazzi, G. Savio, Basingstoke, Hampshire, UK: Palgrave MacMillan 2007

Christiano L., Fitzgerald T.J., *The bandpass filter, „*International Economic Review" 2003, nr 44(2).

De Haan J., Inklaar R., Sleijpen O., *Have business cycles become more synchronized?*, „Journal of Common Market Studies" 2002, nr 40.

Eickmeier S., Breitung J., *How Synchronized are New EU Member States with the Euro Area? Evidence from a Structural Factor Model*, „Journal of Comparative Economics" 2006, t. 34, nr 3.

Estrella A., *Extracting Business Cycle Fluctuations: What Do Time Series Filters Really Do?*, Staff Report No. 289, Federal Reserve Bank of New York, 2007.

Gächter M., Riedl A., Ritzberger-Grünwald D., *Business Cycle Synchronization in the Euro Area and the Impact of the Financial Crisis*, „Monetary Policy and The Economy" 2012, Q2/12.

Hodrick R.J., Prescott E.C., *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, „Journal of Money Credit and Banking" 1997, t. 29, nr 1.

Inklaar R., De Haan J., *Is there really a European business cycle? A comment*, „Oxford Economic Review" 2001, nr 53.

Kaiser R., Maravall A., *Estimation of the business cycle: A modified Hodrick-Prescott filter,* „Spanish Economic Review" 1999, nr 1.

Kufel T., *Postulat zgodności w dynamicznych modelach ekonometrycznych*, Wyd. UMK, Toruń 2002.

Kufel P., *Zgodny dynamiczy model ekonometryczny jako predyktor zależności nieliniowych*, TNOiK, Toruń 2013.

Pollock D.S.G., *Trend estimation and de-trending via rational square-wave filters*, „Journal of Econometrics" 2000, nr 99.
Stock J.H., Watson M.W., *Understanding changes in international business cycle dynamics*, „Journal of the European Economic Association" 2005, nr 3(5).
Zarnowitz V., Ozyildirim A.,*Time Series Decomposition and Measurement of Business Cycles, Trends and Growth Cycles*, NBER Working Paper 8736, 2002.
Zieliński Z., *Zgodne, liniowe, dynamiczne modele ekonometryczne pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego rodzaju*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Ekonomia" 1990, nr 15.
Zieliński Z., Talaga L., *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa 1986.

Process filtration and model parameters as based on modeling inflation in Poland

Summary. The purpose of the present research is an analysis of chosen filters for modeling macroeconomical phenomena. In this article properties and characteristics of Hodrick–Prescott, Baxter–King, Butherword and Christiano–Fitzgerald filters are presented. The following research hypothesis is verified: different filters do not influence on results of estimated models and their properties of residual processes. The analysis is based on values of estimated parameters of models and properties of residual processes.

Key words: congruent modelling, inflation, Hodrick–Prescott filter, Baxter–King filter, Butherword filter, Christiano–Fitzgerald filter