

Łukasz Kuźmiński

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Funkcje nadmiaru i hazardu jako narzędzia w analizie ryzyka zagrożenia powodziowego na Dolnym Śląsku

Streszczenie. W artykule przedstawiono zastosowanie funkcji oczekiwanego nadmiaru oraz funkcji hazardu w analizie ryzyka zagrożenia hydrologicznego. W początkowej części szczegółowo opisane są teoretyczne i empiryczne postacie funkcji oczekiwanego nadmiaru i hazardu, a następnie przedstawiono wykresy teoretycznych funkcji nadmiaru i hazardu dla uogólnionych rozkładów Pareto. Końcowa część artykułu zawiera wykresy empirycznych funkcji oczekiwanego nadmiaru i hazardu wykonane dla dziennych stanów wód na rzece Nysa Kłodzka wraz z porównaniem ich z wykresami teoretycznymi dla rozkładów Pareto oraz wnioskami końcowymi.

Słowa kluczowe: uogólnione rozkłady Pareto, dzienny stan wody, funkcja oczekiwanego nadmiaru, funkcja hazardu

Wstęp

Wartości ekstremalne różnych charakterystyk od wielu lat są w kręgu zainteresowań badaczy i ekspertów z wielu dziedzin. Zainteresowanie tymi wartościami wynika z faktu, iż są one bezpośrednim powodem występowania wielu niekorzystnych zjawisk w różnych dziedzinach.

Artykuł poświęcony jest analizie wartości ekstremalnych w dziedzinie hydrologii. Ekstremalne wartości w tej dziedzinie są głównym powodem katastroficznych zjawisk, jakimi są podtopienia i powodzie występujące na wielu obszarach Polski. W opracowaniu ograniczono się do obszaru Dolnego Śląska. Praca jest

jedną z cyklu opracowań poświęconych analizie ryzyka zagrożenia powodziowego na Dolnym Śląsku. Skupiono się w niej na diagnostycznych narzędziach graficznych, stanowiących wsparcie analizy wartości ekstremalnych. Dokładnie przedstawiono zastosowanie funkcji nadmiaru i hazardu (ang. *excess and hazard functions*) w analizie rozkładów wartości ekstremalnych w hydrologii.

Zastosowanie wymienionych funkcji przedstawimy na dziennych danych dotyczących stanów wód na wybranej rzece na Dolnym Śląsku. Dane pochodzą z Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej w Warszawie.

1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Wprowadzimy teraz podstawowe pojęcia, które będą wykorzystywane w opracowaniu. Na początku oznaczymy przez F dystrybuantę, a przez f funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla ciągu zmiennych losowych o identycznych rozkładach, czyli o wspólnej dystrybuancie F , oznaczonego jako X_1, \dots, X_n . Rzeczywista wartość dystrybuanty zmiennej losowej X jest określona wzorem $F(x) = P\{X \leq x\}$. Wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X oznaczono standardowo przez $E(X)$ i $V(X)$.

Jedną z metod wyselekcjonowania górnych ekstremalnych wartości ze zbioru danych x_1, \dots, x_n jest wybranie spośród obserwacji tych, których wartość przekracza pewien ustalony wysoki próg, który oznaczymy przez u . Przez y_j oznaczymy te wartości x_j , które spełniają nierówność $x_j > u$ i określać je będziemy przekroczeniami progu u . Wartości $y_j - u$ zdefiniujemy jako nadmiary ponad progiem u .

Jako $\omega(F)$ oznaczony zostanie prawy końcowy punkt dystrybuanty F definiowany wzorem $\omega(F) = \sup\{x: F(x) < 1\}$. Mówimy, że próg jest progiem wysokim, jeżeli u jest bliskie $\omega(F)$. Z kolei przez $\alpha(F)$ oznaczony zostanie lewy punkt końcowy dystrybuanty F , określony wzorem $\alpha(F) = \inf\{x: F(x) > 0\}$ ¹.

Inną metodą selekcji stosowaną w teorii wartości ekstremalnych jest wybranie wartości maksymalnych z określonej liczby zbiorów danych. W ten sposób otrzymamy n maksymalnych wartości wybranych spośród zbiorów m -elementowych, które oznaczymy jako:

$$z_i = \max\{x_{i,1}, \dots, x_{i,m}\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Otrzymane w wyniku tej selekcji wartości z_i są realizacjami zmiennej losowej określonej wzorem:

$$M_m = \max\{x_1, \dots, x_m\}. \quad (2)$$

¹ Por. M.R. Thomas, *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhauser, Berlin 2007.

2. Funkcja nadmiaru

Funkcje średniej i mediany nadmiaru są ważnymi narzędziami w analizie wartości ekstremalnych z diagnostycznego punktu widzenia, ponieważ funkcje nadmiaru na przykład dla funkcji dystrybuant uogólnionych rozkładów Pareto są liniami prostymi. Wykorzystując te funkcje do danych empirycznych, otrzymujemy kolejną użyteczną technikę wizualizacji rozkładów dla danych empirycznych. W dalszej części rozdziału przedstawimy szczegółowo poszczególne rodzaje funkcji nadmiaru.

2.1. Dystrybuanty nadmiaru

Wprowadzone w poprzednim rozdziale pojęcie nadmiarów ponad progiem u oznaczmy jako $y'_i = y_i - u$ i są one wariantem przekroczeń y_i . Zauważmy, że nadmiary są przekroczeniami przesuniętymi w lewo o wartość progu u . Dystrybuantą nadmiaru przy wartości u jest funkcja dana wzorem

$$F^{(u)}(x) = F^{[u]}(x+u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

gdzie $F^{[u]}$ jest dystrybuantą przekroczenia. Zauważmy, że funkcja $F^{[u]}$ jest z lewej strony ograniczona przez 0.

Dystrybuanta nadmiaru $F^{(u)}$ może być wprowadzona w postaci dystrybuanty warunkowej. Jeżeli X jest zmienną losową z dystrybuantą F , to wtedy

$$F^{(u)}(x) = P(X - u | X > u) \quad (4)$$

jest warunkową dystrybuantą zmiennej losowej $X - u$ pod warunkiem, że $X > u$.

Dystrybuanta nadmiaru $F^{(u)}$ jest alternatywnie nazywana jako dystrybuanta pozostałego życia w wieku u , gdzie $F^{(u)}(x)$ jest prawdopodobieństwem, że pozostały czas życia jest mniejszy lub równy x pod warunkiem przeżycia do wieku u .

W tym rozdziale będziemy szczególnie zainteresowani funkcjonalnymi parametrami dystrybuanty nadmiaru $F^{[u]}$ jako funkcji w punkcie u . Dla przykładu, funkcja oczekiwanego nadmiaru opisuje oczekiwany pozostały czas życia pod warunkiem dożycia wieku u .

2.2. Funkcja oczekiwanego nadmiaru

Funkcja oczekiwanego nadmiaru e_F dystrybuanty F (odpowiednio zmiennej losowej X) jest dana przez warunkową wartość oczekiwaną zmiennej $X - u$ pod warunkiem $X > u$. W związku z tym mamy

$$e_F(u) = E(X - u | X > u) = \int x dF^{(u)}(x), \quad u < \omega(F). \quad (5)$$

Oczywiste jest, że $e_F(u)$ jest dystrybuantą oczekiwanego nadmiaru przy u . Funkcja oczekiwanego nadmiaru e_F jest również nazywana funkcją oczekiwanego pozostałego życia². Zauważmy w tym miejscu, że

$$e_{F_{\mu,\sigma}}(u) = \sigma e_F((u - \mu) / \sigma), \quad (6)$$

gdzie μ i σ są parametrami odpowiednio położenia i skali.

W połączeniu z wizualizacją danych, jesteśmy wyraźnie zainteresowani dystrybuantami, dla których funkcja średniego nadmiaru jest linią prostą. Wiadomo, że dystrybuanty uogólnionych rozkładów Pareto spełniają ten warunek³.

My również rozpatrujemy dystrybuanty odwrotnego rozkładu Weibulla opisanego wzorem ogólnym

$$\tilde{G}_{2,\alpha}(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha}), \quad x > 0,$$

z parametrem $\alpha > 0$. Na uwagę zasługuje fakt, że $\tilde{G}_{2,-1} = W_0$ jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego na dodatniej części osi odciętych.

Poniżej przedstawiamy listę funkcji oczekiwanego nadmiaru dla dystrybuant uogólnionych rozkładów Pareto oraz dla dystrybuant odwrotnego rozkładu Weibulla.

$$\begin{aligned} \text{Exponential (GP0):} & \quad e_{W_0}(u) = 1, & \quad u > 1, \\ \text{Pareto (GP1), } \alpha > 1: & \quad e_{W_{1,\alpha}}(u) = u / (\alpha - 1), & \quad u > 1, \\ \text{Beta (GP2), } \alpha < 0: & \quad e_{W_{2,\alpha}}(u) = u / (\alpha - 1), & \quad -1 \leq u \leq 1, \\ \text{GP: } e_{W_\gamma}(u) = \frac{1 + \gamma u}{1 - \gamma} & \quad \text{dla } \begin{cases} 0 < u & \text{jeśli } 0 \leq \gamma < 1, \\ 0 < u < -1 / \gamma, & \gamma < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Odwrotny rozkład Weibulla, $\alpha < 0$: $e_{\tilde{G}_{2,\alpha}}(u) = |\alpha|^{-1} u^{1+\alpha} (1 + O(u^\alpha))$, gdzie $O(u^\alpha)$ oznacza wyrażenie, którego wartość nie przekracza wartości bezwzględnej z wyrażenia u^α pomnożonego przez pewną stałą⁴.

Widzimy, że funkcja oczekiwanego nadmiaru $e_{W_{\gamma,\mu,\sigma}}$ ma parametr nachylenia $\beta_1 = \gamma / (1 - \gamma)$ i wyraz wolny $\beta_0 = (1 - \gamma\mu) / (1 - \gamma)$, dlatego nachylenie funkcji oczekiwanego nadmiaru dla dystrybuant uogólnionych rozkładów Pareto $W_{\gamma,\mu,\sigma}$ wzrasta

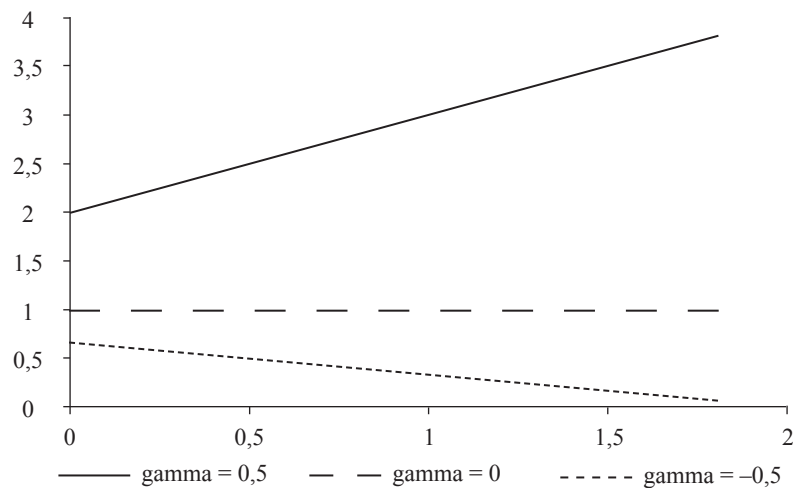
² Por. R. Hogg, S. Klugman, *Loss Distributions*, Wiley, New York 1984.

³ Por. B. Bobee, F. Ashkar, *The Gamma Family and Derived Distributions Applied in Hydrology*, Water Resources Publications, Littleton 1991.

⁴ Ibidem.

wraz ze wzrostem parametru γ . Na wykresie 1 przedstawione są funkcje oczekiwanego nadmiaru uogólnionych rozkładów Pareto dla trzech wybranych wartości parametru γ .

Wykres 1. Funkcje oczekiwanego nadmiaru uogólnionych rozkładów Pareto dla parametrów $\gamma = -0,5, 0, 0,5$



Źródło: opracowanie własne.

Jeśli dystrybuanta nadmiaru $F^{(s)}$ jest zbliżona do dystrybuanty uogólnionych rozkładów Pareto W , to z (5) wynika, że $e_F(u)$, $u \geq s$ jest zbliżona do odpowiedniej linii prostej określonej przez W . Funkcje oczekiwanego nadmiaru nie istnieją dla dystrybuant Pareto z parametrem kształtu $\alpha \leq 1$ ⁵.

Zauważmy, że

$$e_F(u) = \frac{E((X-u)I(X>u))}{P\{X>0\}}, \quad u < \omega(F).$$

Następnie otrzymujemy

$$E((X-u)I(X>u)) = \int I(u < X)(x-u)dF(x) = \int (1-F(x))dx, \quad (8)$$

gdzie drugie równanie może być zweryfikowane, zapisując

$$x-u = \int I(u \leq y)I(y < x)dy, \quad x \geq u,$$

⁵ Por. M. R. Thomas, op. cit.

i zmieniając porządek całkowania zgodnie z twierdzeniem Fubiniego⁶. Stąd funkcję oczekiwanego nadmiaru możemy zapisać jako

$$e_F(u) = \frac{\int_0^{\infty} (1-F(x)) dx}{1-F(u)}, \quad u < \omega(F). \quad (9)$$

Wartość oczekiwana dana wzorem

$$E(\max\{X-u, 0\}) = \int_u^{\infty} (1-F(x)) dx \quad (10)$$

jest nazywana „ogonem prawdopodobieństw”.

2.3. Funkcje oczekiwanego nadmiaru dla próby

W tym podrozdziale przedstawimy funkcję oczekiwanego nadmiaru dla danych empirycznych, czyli inaczej mówiąc funkcję oczekiwanego nadmiaru dla próby losowej.

Przez e_F oznaczmy ponownie funkcję oczekiwanego nadmiaru dystrybuanty F . Podstawiając w próbie dystrybuantę \hat{F}_n opartą na x_1, \dots, x_n , otrzymujemy przez

$$e_n(u) = e_{\hat{F}_n}(u) = \frac{\sum_{i \leq n} (x_i - u) I(x_i > u)}{\sum_{i \leq n} I(x_i > u)}, \quad x_{1:n} < u < x_{n:n} \quad (11)$$

estymator funkcji e_F . Zauważmy, że $e_n(u)$ jest średnią wartością nadmiarów ponad próg u w próbie n -elementowej.

Funkcje oczekiwanego nadmiaru dla prób będą jednym z naszych podstawowych narzędzi służących do weryfikacji prawdziwości hipotezy o zgodności rozkładu z próby z uogólnionym rozkładem Pareto w górnym ogonie rozkładu.

Możliwość zastosowania tego podejścia jest potwierdzona przez związek z odwrotną funkcją hazardu w połączeniu z warunkiem von Mises, co przedstawione zostanie w dalszej części tego rozdziału.

2.4. Funkcje hazardu

Funkcja hazardu h_F dystrybuanty F z funkcją gęstości prawdopodobieństwa f dana jest wzorem

$$h_F(t) = f(t) / (1-F(t)), \quad t < \omega(F). \quad (12)$$

⁶ Por. I. Bronsztejn, K. Siemiendajew, G. Musiol, H. Muhling, *Nowoczesne kompendium matematyki*, WN PWN, Warszawa 2009.

Zauważmy, że h_F jest pochodną dystrybuanty funkcji hazardu, która opisana jest wzorem

$$H_F(t) = -\log(1 - F(t)), \quad t < \omega(F). \quad (13)$$

Wartość $h_F(t)$ jest również nazywana współczynnikiem hazardu lub współczynnikiem śmiertelności w wieku t . To jest prawostronna pochodna wzięta w zerze dystrybuanty pozostałego życia $F^{(t)}$ w wieku t . Mamy

$$F^{(t)}(x) \approx h_F(t) x \quad (14)$$

dla małych x . Przypominamy, że $F^{(t)}(x)$ jest prawdopodobieństwem, iż pozostały czas życia jest mniejszy niż chwila x wziętego przeżycia w wieku t . Dlatego przyjmujemy interpretację, że współczynnik śmiertelności jest w przybliżeniu równy prawdopodobieństwu, iż pozostały czas życia jest mniejszy niż 1, pod warunkiem dożycia wieku t . Sprawdzamy, że

$$h_{F_{\mu,\sigma}}(t) = h_F((t - \mu) / \sigma) / \sigma, \quad (15)$$

gdzie μ i σ oznaczają odpowiednio parametry położenia i skali⁷.

Poniżej przedstawiamy funkcje hazardu dla dystrybuant uogólnionych rozkładów Pareto oraz odwrotnych dystrybuant rozkładu Weibulla i Gumbela.

$$\begin{aligned} \text{Exponential (GP0):} \quad & h_{W_0}(t) = 1, & t > 0, \\ \text{Pareto (GP1), } \alpha > 1: & h_{W_{1,\alpha}}(t) = \alpha / t, & t > 0, \\ \text{Beta (GP2), } \alpha < 0: & h_{W_{2,\alpha}}(t) = \alpha / t, & -1 \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Z uwzględnieniem parametryzacji γ możemy trzy powyższe funkcje hazardu zapisać w postaci jednego wzoru

$$\text{GP: } h_{W_\gamma}(t) = \frac{1}{1 + \gamma t} \quad \text{dla } \begin{cases} 0 < t, & \text{jeśli } 0 \leq \gamma, \\ 0 < t < 1/|\gamma|, & \text{jeśli } \gamma < 0. \end{cases}$$

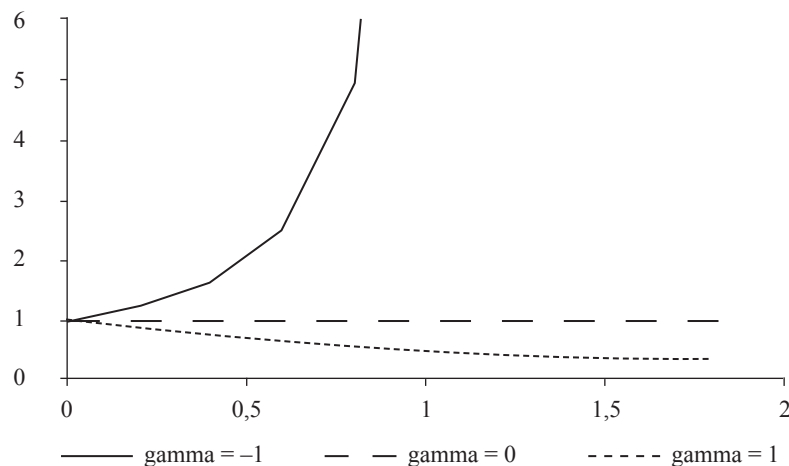
$$\text{Odwrotny rozkład Weibulla, } \alpha < 0: h_{\tilde{G}_{2,\alpha}}(t) = |\alpha| t^{-(1+\alpha)}, \quad t > 0.$$

$$\text{Odwrotny rozkład Gumbela: } h_{\tilde{G}_0}(t) = e^t.$$

Wykresy funkcji hazardu dla uogólnionych rozkładów Pareto dla trzech wybranych wartości parametru γ przestawimy na wykresie 2.

Funkcja hazardu odwrotnej dystrybuanty rozkładu Weibulla $\tilde{G}_{2,\alpha}$ jest rosnącą linią prostą, jeżeli $\alpha = -2$. Przypomnijmy również, że $\tilde{G}_{2,-2}$ jest dystrybuantą

⁷ R. Hogg, S. Klugman, op. cit.

Wykres 2. Funkcje hazardu dystrybuant uogólnionych rozkładów Pareto dla $\gamma = -1, 0, 1$.

Źródło: opracowanie własne.

rozkładu Rayleigha⁸. Co więcej, można łatwo sprawdzić, że odwrotnymi dystrybuantami rozkładu Gumbela $\tilde{G}_{0,\mu,\sigma}$ są tylko te, które spełniają znane prawo Gompertza zakładające, że wskaźnik śmiertelności jest opisany wzorem:

$$h(x) = ae^{bx}.$$

Stąd \tilde{G}_0 jest również nazywana dystrybuantą Gompertza. Ponieważ

$$1 - F(t) = \exp\left(-\int_{\alpha(F)}^t h_F(x) dx\right), \quad \alpha(F) < t < \omega(F), \quad (17)$$

zatem funkcja przeżycia i stąd również dystrybuanta F może być uzyskana z funkcji hazardu.

Funkcja hazardu i stąd funkcja przeżycia może być wyrażona przez funkcję oczekiwanego nadmiaru. Przemnażając obie strony równania przez $1 - F(u)$ i biorąc pochodne, otrzymujemy

$$h_F(t) = \frac{1 + e'_F(t)}{e_F(t)}, \quad \alpha(F) < t < \omega(F). \quad (18)$$

Kiedy połączymy to z (17), otrzymujemy

$$1 - F(t) = \exp\left(-\int_{\alpha(F)}^t \frac{1 + e'_F(x)}{e_F(x)} dx\right), \quad \alpha(F) < t < \omega(F)^9. \quad (19)$$

⁸ R. Magiera, *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.

⁹ Por. M.R. Thomas, op. cit.

2.5. Funkcje hazardu dla próby

Funkcja hazardu dla próby określona wzorem

$$h_{n,b}(t) = \frac{f_{n,b}(t)}{1 - \hat{F}_{n,b}(t)}, \quad t < x_{n:n}, \quad (20)$$

jest estymatorem funkcji hazardu h_F określonej wzorem (12), gdzie $f_{n,b}$ jest jądrem gęstości prawdopodobieństwa, a $\hat{F}_{n,b}$ jest jądrem dystrybuanty. Z uwagi na ograniczone ramy tego opracowania, szczegóły dotyczące funkcji empirycznych $f_{n,b}$ i $\hat{F}_{n,b}$ nie będą przytoczone. Można je znaleźć w pracy Thomasa¹⁰. Na uwagę zasługuje fakt, że $\hat{F}_{n,b}$ może być zastąpiona przez funkcję dystrybuanty empirycznej \hat{F}_n określonej wzorem

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} I(x_i \leq x).$$

Jakość estymatora funkcji hazardu $h_{n,b}(t)$ jest bardzo mocno uzależniona od wyboru odpowiedniego szerokości pasma b w funkcji jądra gęstości prawdopodobieństwa.

Dla danych pogrupowanych w szeregi rozdzielcze, z częstością $n(j)$ w przedziałach $[t_j, t_{j+1})$, empiryczna funkcja hazardu jest definiowana przez średnie histogramu. Zgodnie z tym otrzymujemy

$$h_n(t) = \frac{n(j)}{(t_{j+1} - t_j) \sum_{i \geq j} n(i)}, \quad t_j \leq t < t_{j+1}. \quad (21)$$

Inna wersja empirycznej funkcji hazardu może być otrzymana przez wyznaczenie pochodnej wygładzonej dystrybuanty empirycznej funkcji hazardu opisaną wzorem $\log(1 - \hat{F}_n)$.

3. Funkcje hazardu i oczekiwanego nadmiaru dla danych hydrologicznych

3.1. Dane hydrologiczne

Jak zostało nadmienione we wstępie, głównym celem pracy jest przedstawienie możliwości zastosowania funkcji oczekiwanego nadmiaru oraz funkcji hazardu, jako narzędzi diagnostycznych wspierających analizę zagrożenia powodziowego. Dokładnie chcemy pokazać, że wymienione funkcje mogą być efektywnym narzędziem przy identyfikacji rozkładów w analizie wartości ekstremalnych na potrzeby hydrologii.

¹⁰ Ibidem.

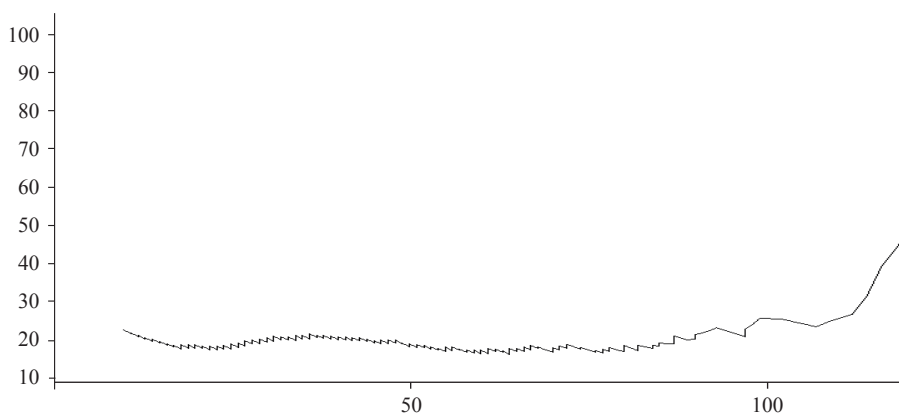
Podstawową charakterystyką badaną w tej pracy jest stan wody. Jest to wzniesienie zwierciadła wody w cieku ponad umowny poziom odniesienia (co nie jest równoznaczne z głębokością cieku). Należy rozróżnić pojęcia stan wody i poziom wody. Są to te same wielkości fizyczne, jednak podawane względem różnych odniesień. Poziomy terenu liczymy od przyjętego poziomu morza, dlatego wysokość, na której znajdują się obiekty na Ziemi wyrażamy w metrach nad poziomem morza. W Polsce sieć wodowskazowa odniesiona jest obecnie do poziomu morza w Kronsztadzie w Rosji. Dla uproszczenia zapisu wzniesienie zwierciadła wody liczymy od ustalonego „zera” wodowskazu. Taki pomiar nazywamy stanem wody, w odróżnieniu od poziomów liczonych względem przyjętego zera niwelacji¹¹.

Hydrologiczne dane empiryczne wykorzystane w opracowaniu dotyczą dziennych stanów wód na rzece Nysa Kłodzka obserwowanych w stacji naziemnej w Bystrzycy Kłodzkiej. Dane uzyskane zostały z Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej i pochodzą z okresu od 4 kwietnia 2009 r. do 31 grudnia 2011 r. Składa się na nie 1000 dziennych obserwacji. Na podstawie tych danych wykreślone zostaną: funkcja oczekiwanego nadmiaru oraz funkcja hazardu.

3.2. Funkcja oczekiwanego nadmiaru dla dziennych stanów wód

Wykorzystując wzór (11) w programie Xtremes 4.1 sporządzono wykres empirycznej funkcji oczekiwanego nadmiaru na podstawie danych opisanych we wcześniejszym podrozdziale opracowania (wykres 3).

Wykres 3. Empiryczna funkcja oczekiwanego nadmiaru dla dziennych stanów wód na rzece Nysa Kłodzka



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z IMGW.

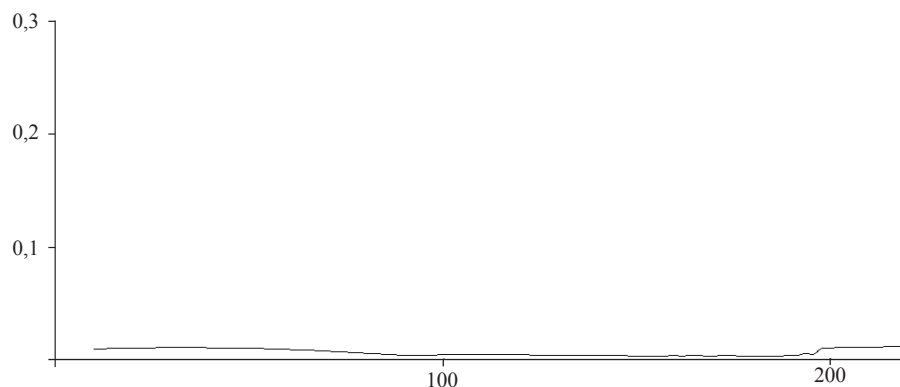
¹¹ U. Soczyńska, *Hydrologia dynamiczna*, WN PWN, Warszawa 1997.

Jak wcześniej wspominaliśmy, w artykule prezentujemy funkcję oczekiwanego nadmiaru jako narzędzie służące do identyfikacji uogólnionego rozkładu Pareto dla danych empirycznych. Z wykresu 1 przedstawiającego funkcje oczekiwanego nadmiaru dla teoretycznych uogólnionych rozkładów Pareto oraz z wykresu 3 obrazującego funkcję oczekiwanego nadmiaru dla badanych danych empirycznych widać dość wyraźnie, że funkcja na wykresie 3 jest zbliżona do wykresu funkcji oczekiwanego nadmiaru uogólnionego rozkładu Pareto z parametrem $\gamma = 0$ danej wzorem GP we wzorach. Na tej podstawie wnioskujemy, że rozkład nadmiarów $y'_i = y_i - u$, opisanych w początkowej części artykułu, stanów wód na rzece Nysa Kłodzka najlepiej opisuje uogólniony rozkład Pareto z parametrem $\gamma = 0$.

3.3. Funkcja hazardu dla dziennych stanów wód

W programie Xtremes 4.1 wykonano wykres empirycznej funkcji hazardu dla dziennych stanów wód na rzece Nysa Kłodzka (wykres 4).

Wykres 4. Empiryczna funkcja hazardu dla dziennych stanów wód na rzece Nysa Kłodzka



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z IMGW.

Porównując wykonany wykres z wykresami teoretycznych funkcji hazardu dla uogólnionych rozkładów Pareto, przedstawionych na wykresie 2, widzimy również, że empiryczna funkcja hazardu z wykresu 4 najbardziej zbliżona jest do teoretycznej funkcji hazardu dla uogólnionego rozkładu Pareto z parametrem $\gamma = 0$. Jest to dla nas dodatkowe potwierdzenie wniosku wysuniętego w poprzednim podrozdziale, że rozkład nadmiarów $y'_i = y_i - u$ stanów wód na rzece Nysa Kłodzka najlepiej opisuje uogólniony rozkład Pareto z parametrem $\gamma = 0$.

Zakończenie

W artykule tym, stanowiącym kolejną pozycję w cyklu prac nad analizą ryzyka zagrożenia hydrologicznego na Dolnym Śląsku z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych, przedstawiona została możliwość zastosowania funkcji oczekiwanego nadmiaru oraz funkcji hazardu do identyfikacji empirycznego rozkładu nadmiarów w analizie stanów wód. W początkowej części przedstawiono szczegółowo teoretyczną i empiryczną postać funkcji oczekiwanego nadmiaru i hazardu. Następnie pokazano wykresy teoretycznych funkcji oczekiwanego nadmiaru oraz hazardu dla rodziny uogólnionych rozkładów Pareto dla wybranych wartości parametrów gamma.

W końcowej części pracy przedstawiono wykresy empirycznych funkcji oczekiwanego nadmiaru oraz funkcji hazardu dla dziennych stanów wód na rzece Nysa Kłodzka. Na podstawie porównania wykresów empirycznych funkcji z wykresami funkcji teoretycznych dla uogólnionych rozkładów Pareto otrzymaliśmy wniosek, że rozkład nadmiarów $y_i' = y_i - u$ stanów wód na rzece Nysa Kłodzka najlepiej opisuje uogólniony rozkład Pareto z parametrem $\gamma = 0$.

Z uwagi na prostą postać funkcji oczekiwanego nadmiaru oraz hazardu, a co za tym idzie łatwość w ich wykreślaniu zarówno w wersji teoretycznej, jak i empirycznej, są one bardzo praktycznym narzędziem w identyfikacji rozkładów. Mogą być przydatnym narzędziem w analizie ryzyka zagrożenia powodziowego z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych.

Literatura

- Beirlant J., Teugels J., *Practical Analysis of Extreme Values*, Leuven University Press, Leuven 1996.
- Bobee B., Ashkar F., *The Gamma Family and Derived Distributions Applied in Hydrology*, Water Resources Publications, Littleton 1991.
- Bronsztejn I., Siemiendajew K., Musiol G., Muhling H., *Nowoczesne kompendium matematyki*, WN PWN, Warszawa 2009.
- Castillo E., *Extreme Value Theory in Engineering*, Academic Press, Boston 1988.
- Cleveland W., *Visualizing Data*, Hobart Press, New Jersey 1993.
- Coles S., *An Introduction to the Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer, London 2001.
- Graham R., Knuth D., Patashnik O., *Matematyka konkretna*, WN PWN, Warszawa 2006.
- Hipel K., *Extreme Values: Floods and Droughts*, Kluwer, Dordrecht 1994.
- Hogg R., Klugman S., *Loss Distributions*, Wiley, New York 1984.
- Kuźmiński Ł., *Graniczne dystrybuanty wartości ekstremalnych dla zależnych ciągów zmiennych losowych*, „*Ekonometria*” 2013, nr 2(39).
- Kuźmiński Ł., *Statystyki pozycyjne w prognozach ostrzegawczych*, w: *Zastosowanie metod ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*, red. S. Forlicz, DeDeWu, Warszawa 2012.
- Magiera R., *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.

Soczyńska U., *Hydrologia dynamiczna*, WN PWN, Warszawa 1997.

Thomas M. R., *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhauser, Berlin 2007

The applications of the excess and hazard functions to the risk analysis of flood threat in the Lower Silesia

Summary. In the article, the use of function of the expected excess and the hazard function in the analysis of hydrological hazards are presented. In the initial part of the article, the theoretical and empirical forms of function of the expected excess and hazard are described in details. Then the theoretical graph of excess and hazard for generalized Pareto distribution is presented. The final part of the article contains the graphs of empirical function of the expected excess and hazard, made for daily water levels on the Nysa Klodzka river, all of which are compared with the theoretical graphs for Pareto distributions, and the final conclusions.

Key words: Generalized Pareto distributions, daily water level, the expected function of excess, the hazard function